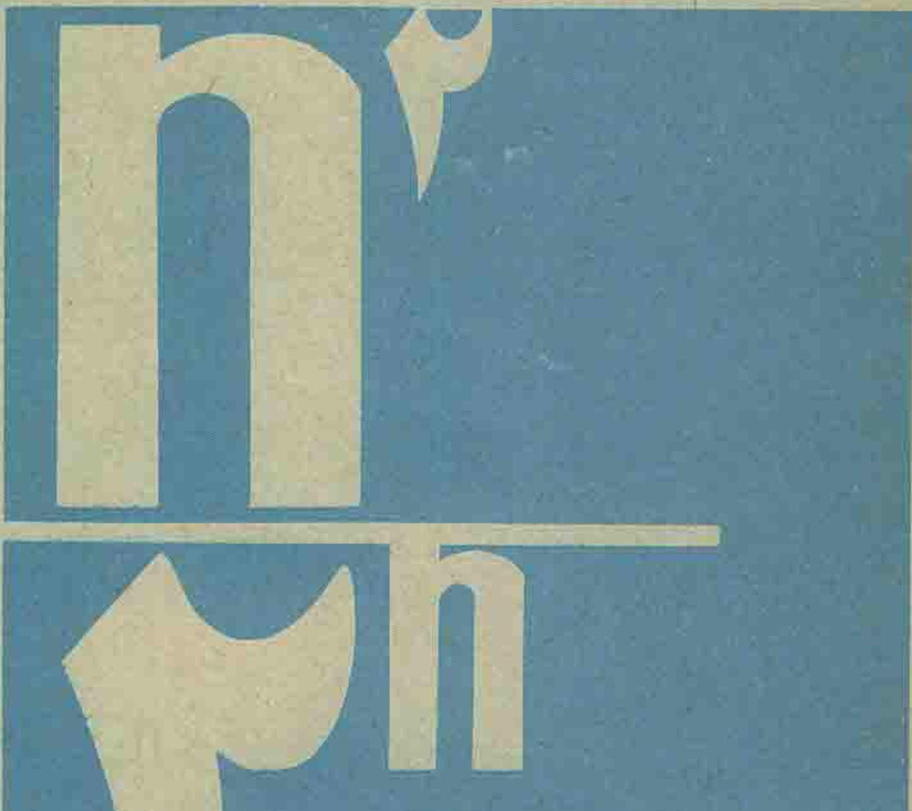
جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

حساب و جبر

سال دوم
آموزش متوسطهٔ عمومی
ریاضی و فیزیک



۲۳۲

بسم الله الرحمن الرحیم

حساب و جبر

سال دوم

آموزش متوسطه عمومی

ریاضی و فیزیک

پدید آورندگان:

مؤلف: ابوالقاسم قربانی

رسام: خسرو مدیریان

۱۳۶۰

چاپ از : چاپخانه بهارستان

فهرست

بخش اول

مشتمل بر سه فصل

فصل ۱

حل معادلات درجهٔ دوم

۱ـ معادلهٔ $P(x)=0$ را که درآن $P(x)$ چند جمله‌ای است معادلهٔ صحیح و درجهٔ چند جمله‌ای $P(x)$ را درجهٔ این معادله می‌نامند . اگر $P(x)=ax+b$ ، آنگاه $ax+b=0$ صورت کلی یك معادلهٔ یك مجهولی درجه اول خوانده می‌شود که a ضریب مجهول و b مقدار معلوم بوده و وقتی $a\neq 0$ داریم $x=\frac{-b}{a}$ و اگر $P(x)=ax^2+bx+c$ ، آنگاه $ax^2+bx+c=0$ یك معادلهٔ یك مجهولی درجه دوم است .

تعریف ـ معادلهٔ یك مجهولی درجهٔ دوم برحسب x معادله‌ای است که به صورت زیر باشد :

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (1)$$

معادلهٔ (۱) را شکل کلی معادلهٔ یك مجهولی درجهٔ دوم می‌نامند . در این معادله a و b و c اعداد حقیقی معلوم فرض می‌شوند. b و c ممکن است صفر باشند ولی همواره فرض می‌کنیم $a\neq 0$ ، زیرا در غیر این‌صورت معادله از درجهٔ دوم نخواهد بود.[1]

خاطر نشان می‌کنیم که در موقع حل کردن معادلهٔ (۱) مجموعهٔ R را مجموعهٔ مرجع می‌گیریم. یعنی مجهول x باید عددی حقیقی باشد. و درصورتی‌که x حقیقی نباشد می‌گویند معادله جواب ندارد یا مجموعهٔ جواب آن تهی است.

اگر b یا c یا هردو صفر باشد، معادلهٔ درجهٔ دوم را ناقص می‌نامند و اگر هیچیك از ضرایب a و b و c صفر نباشد، معادلهٔ درجهٔ دوم کامل نامیده می‌شود.

باید توجه داشت که معادلات یك مجهولی درجه اول ودرجه دوم ـ همیشه به صورت فوق نیست بلکه بیشتر اوقات معادلات به‌صورت :

$$f(x)=g(x) \qquad (1)$$

که‌در آن $f(x)$ و $g(x)$ عبارات جبری هستند ، می‌باشد . اگر $f(x)$ و $g(x)$ چند جمله‌ای باشند

۱ـ اگر a متغیر باشد وگاهی بتواند مقدار صفررا اختیار کند، حالت استثنایی پیش‌می‌آید که آن را درکلاسهای بعد مورد بحث قرار خواهیم داد.

معادله را صحیح و اگـر $f(x)$ و $g(x)$ کسری باشند $\left(\frac{x-۲}{x-۳}=\frac{x}{۲}\right)$ معادله را کسری و اگر $f(x)$ یا $g(x)$ زیر رادیکال باشد $(\sqrt{۲x+۵}=x)$ معادله را گنگ یا اصم می‌نامند.

معمولا اعمالی باید روی (۱) انجام شود تا معادله بـه صورت $ax+b=۰$ یا $ax^۲+bx+c=۰$ بیرون آید.

حوزه تعریف یك معادله

معادلهٔ $f(x)=g(x)$ وقتی‌ریشه دارد که اولا حوزه تعریف $f(x)$ و $g(x)$ یعنی D_f و D_g تعریف شده باشند (یعنی برای هرعدد حقیقی متعلق D_f یا D_g بتوان $f(x)$ یا $g(x)$ را حساب کرد) ثانیاً $D_f \cap D_g \neq \varnothing$.

مثال ۱ ـ معادلهٔ $\sqrt{۲x+۵}=-۲$ دارای ریشه نیست زیـرا حوزه تعـریف $\sqrt{۲x+۵}$ اعداد مثبت است درصورتی که طرف چپ ۲ ـ است.

مثال ۲ ـ معادلهٔ $\sqrt{x-۳}=\sqrt{۳-x}$ دارای ریشه‌است زیـرا در طـرف چپ $D_f=\left\{x|x\in R \text{ و } x\geqslant ۳\right\}$ و درطرف راست $D_g=\left\{x|x\in R \text{ و } x\leqslant ۳\right\}$ که اشتراك آنها $D_f \cap D_g=\left\{۳\right\}$ وخود ۳ جواب است.

۲ـ روش کلی حل معادلهٔ درجهٔ دوم ـ همان‌گونه‌که در سال اول گفتیم، به‌طورکلی برای حل معادلهٔ درجهٔ دوم:

$$ax^۲+bx+c=۰ \qquad (۱)$$

طرف چپ آن را در صورت امکان به حاصل ضرب دو دوجمله‌ای درجهٔ اول $A(x)$ و $B(x)$ تجزیه می‌کنیم تا معادله به‌صورت زیر درآید:

$$A(x).B(x)=۰ \qquad (۲)$$

در این صورت معادلهٔ (۱) هم ارز است با دو معادلهٔ درجهٔ اول: $A(x)=۰$ یا $B(x)=۰$. معادلهٔ: $(۲x+۳)^۲-(x-۶)^۲=۰$

مثال ـ برای حل:

آن را چنین می‌نویسیم:

$$(۲x+۳+x-۶)(۲x+۳-x+۶)=۰$$

و یا

$$(۳x-۳)(x+۹)=۰$$

این معادله هم‌ارز است با دومعادلهٔ $۳x-۳=۰$ و $x+۹=۰$، و بنابراین ریشه‌های آن عبارتند از $x'=-۹$ و $x''=۱$.

II ـ حل بعضی از معادلات درجهٔ دوم (بدون استفاده از دستور)

پیش از آن‌که دستور کلی حل معادلهٔ درجهٔ دوم را بیان کنیم، چند نوع معادله را حل می‌کنیم تا زمینه برای به‌دست‌آوردن دستور کلی آماده شود.

۳ ـ حل معادلهٔ: $x^{2}+bx+c=0$

دراین معادله ضریب x^{2} یعنی a مساوی با ۱ است. اگربتوانیم دوعدد بیابیم که مجموع آنها b و حاصل‌ضربشان c باشد، با استفاده از اتحاد:

$$x^{2}+(p+q)x+pq\equiv(x+p)(x+q)$$

می‌توانیم طرف چپ معادله را به‌حاصل‌ضرب دو دوجمله‌ای درجهٔ اول تجزیه‌کنیم وحل معادله ساده می‌شود.

مثال ـ حل معادلهٔ: $x^{2}-5x+6=0$

به‌آسانی می‌توان دریافت که دوعدد ۲ــ و ۳ــ مجموعشان ۵ــ و حاصل‌ضربشان ۶ است. بنابراین معادله را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$(x-2)(x-3)=0$$

و این معادله با دومعادلهٔ $x-2=0$ و $x-3=0$ هم‌ارز است و بنابراین‌ریشه‌های آن عبارتند از $x'=2$ و $x''=3$.

تمرین

معادلات زیر را با روش فوق حل‌کنید:

۱	$x^{2}-4x+3=0$	۲	$x^{2}-14x+13=0$
۳	$x^{2}-7x+12=0$	۴	$x^{2}-19x+88=0$
۵	$x^{2}+4x+3=0$	۶	$x^{2}+10x+21=0$
۷	$x^{2}+9x+20=0$	۸	$x^{2}+6x+9=0$
۹	$-x^{2}+x+6=0$	۱۰	$x^{2}-3x-10=0$
۱۱	$x^{2}-12x-45=0$	۱۲	$-x^{2}-12x+28=0$
۱۳	$x^{2}+10x-39=0$	۱۴	$8x=20-x^{2}$
۱۵	$x^{2}=x+12$	۱۶	$x^{2}+143=24x$
۱۷	$1-x^{2}=-x-1$	۱۸	$x^{2}-6ax+9a^{2}=0$
۱۹	$x^{2}=2bx-b^{2}$	۲۰	$(x+3)^{2}-b^{2}=0$
۲۱	$4x^{2}-(x+1)^{2}=0$	۲۲	$(2x+1)^{2}-(5-x)^{2}=0$

۴ـ حل معادلهٔ ناقص $ax^2+bx=0$ ـ این معادله را می‌توان به صورت $x(ax+b)=0$ نوشت‌که هم‌ارز است با دومعادلهٔ $x=0$ یا $ax+b=0$.

پس معادلهٔ $ax^2+bx=0$ که در آن $a\neq 0$ همیشه دو ریشه دارد که عبارتند از $x'=0$ و $x''=-\frac{b}{a}$.

تمرین

معادلات زیر را حل‌کنید:

۱ $x^2-3x=0$ ‏ ۲ $x^2+2x=0$

۳ $-6x^2+5x=0$ ‏ ۴ $-7x^2+13x=0$

۵ $12x^2-4x=0$ ‏ ۶ $17x^2+11x=0$

۷ $9x^2+11x=0$ ‏ ۸ $-3x^2-7x=0$

۹ $2mx^2-9x=0$ ‏ ۱۰ $ax^2+(a-1)x=0$

۵ـ حل معادلهٔ ناقص $ax^2+c=0$ ـ این معادله جملهٔ درجهٔ‌اول ندارد ومی‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت :

$$x^2+\frac{c}{a}=0$$

اولاً اگر a و c متحدالعلامه باشند، طرف‌چپ معادلهٔ فوق‌که مجموع x^2 و عددمثبت $\frac{c}{a}$ است، همیشه مثبت است و نمی‌تواند مساوی صفر باشد. پس در این حالت معادله ریشه ندارد ومجموعهٔ جواب آن تهی است.

ثانیاً اگر a و c مختلف‌العلامه باشند ، $\frac{c}{a}$ منفی وبنابراین $-\frac{c}{a}$ مثبت است و می‌توان معادله را چنین نوشت:

$$x^2-\left(-\frac{c}{a}\right)=0$$

یا

$$x^2-\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2=0$$

ویا

$$\left(x+\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)\left(x-\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)=0$$

معادلهٔ فوق هم‌ارز است با دو معادلهٔ :

$$x+\sqrt{-\frac{c}{a}}=0 \quad \text{یا} \quad x-\sqrt{-\frac{c}{a}}=0$$

پس دراین حالت معادله دارای دو ریشه است که قرینهٔ یکدیگر می‌باشند:

$x''=\sqrt{-\frac{c}{a}}$	$x'=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$

و یا به‌طور خلاصه : $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$

تبصره ـ می‌توان معادلهٔ $ax^2+c=0$ را به‌صورت $ax^2=-c$ و یا $x^2=-\frac{c}{a}$ نوشت. اگر طرف راست یعنی $-\frac{c}{a}$ مثبت باشد، از دوطرف جذر می‌گیریم حاصل می‌شود $x=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.

مثال ۱ ـ معادلهٔ $3x^2+5=0$ ریشه ندارد زیرا مجموع دوعدد مثبت نمی‌تواندمساوی با صفر باشد.

مثال ۲ ـ حل معادلهٔ: $4x^2-5=0$

این معادله هم‌ارز است با دومعادلهٔ $2x-\sqrt{5}=0$ یا $2x+\sqrt{5}=0$ (چرا؟) و ریشه‌های آن عبارتند از دوعدد قرینهٔ $x'=\frac{\sqrt{5}}{2}$ و $x''=-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

و نیز می‌توان معادله را به‌صورت $4x^2=5$ و یا $x^2=\frac{5}{4}$ نوشت و از دو طرف‌آن جذرگرفت تا حاصل شود : $x=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$.

تبصره ـ اگر b و c هر دو صفر باشند معادله به‌صورت $ax^2=0$ در می‌آید و اگر $a\neq 0$ دارای ریشهٔ مضاعف $x=0$ است.

تمرین

معادلات زیر را حل‌کنید :

۱ $9x^2-16=0$ ۲ $4x^2-49=0$

۳ $25x^2-64=0$ ۴ $3x^2-48=0$

۵ $7x^2-28=0$ ۶ $14x^2-14=0$

۷ $2x^2+8=0$ ۸ $4x^2+49=0$

۶ـ تشکیل مربع کامل ـ می‌دانیم که :

$$x^2+2px+p^2=(x+p)^2$$

یعنی سه جمله‌ای $x^2+2px+p^2$ مربع کامل دوجمله‌ای $(x+p)$ است . پس :

اگر فقط $x^۲+۲px$ را داشته باشیم وبخواهیم آن‌راکامل‌کنیم تا مربع یك دوجمله‌ای درجهٔ اول شود باید به‌آن $p^۲$ یعنی مربع نصف ضریب x رابیفزاییم.

این عمل را اصطلاحاً تشکیل مربع می‌نامند.

در اتحاد ها گاهی اوقات بجای $=$ از $\equiv$ نیز استفاده می‌شود.

مثال - می‌خواهیم $x^۲-۷x$ را کامل‌کنیم تا مربع یك دو جمله‌ای درجهٔ اول شود.

به‌عبارت فوق مربع نصف ضریب x یعنی $(-\frac{۷}{۲})^۲$ را می‌افزاییم حاصل می‌شود:

$$x^۲-۷x+(-\frac{۷}{۲})^۲=x^۲-۷x+\frac{۴۹}{۴}=\left[x+(-\frac{۷}{۲})\right]^۲=(x-\frac{۷}{۲})^۲$$

۷ - حل معادلهٔ $ax^۲+bx+c=۰$ با روش تشکیل مربع - به وسیلهٔ روش تشکیل مربع که در فوق ذکر کردیم می‌توان معادلهٔ درجهٔ دوم کامل را در صورتی‌که ریشه داشته باشد حل‌کرد.

مثال ۱ - حل معادلهٔ : $\quad x^۲+۶x-۱۸۷=۰ \qquad (۱)$

ابتدا جمله‌هایی را که شامل مجهول x هستند دریك طرف معادله قرار می‌دهیم:

$$x^۲+۶x=۱۸۷$$

اکنون طرف چپ را کامل می‌کنیم تا مربع یك دو جمله‌ای درجهٔ اول شود. برای این کار مربع نصف ضریب x را به‌هر دوطرف معادله می‌افزاییم:

$$x^۲+۶x+(۳)^۲=۱۸۷+(۳)^۲$$

ویا $\quad x^۲+۶x+۹=۱۹۶$

ویا $\quad (x+۳)^۲=۱۹۶ \qquad (۲)$

چون دراین مثال‌طرف راست معادلهٔ (۲) مثبت است می‌توان از دوطرف آن جذر گرفت و نوشت: $\quad x+۳=\pm۱۴$

از معادلهٔ $x+۳=۱۴$ حاصل می‌شود $x'=۱۱$ و از معادلهٔ $x+۳=-۱۴$ حاصل می‌شود $x''=-۱۷$.

و نیز می‌توان معادلهٔ (۲) را به‌صورت زیرنوشت:

$$(x+۳)^۲-(۱۴)^۲=۰$$

ویا $\quad (x+۳+۱۴)(x+۳-۱۴)=۰$

واین معادله هم‌ارز است با دومعادلهٔ زیر:

$$x+۳-۱۴=۰ \quad \text{یا} \quad x+۳+۱۴=۰$$

پس ریشه‌های معادلهٔ (۱) عبارتند از : $x' = ۱۱$ و $x'' = -۱۷$

سؤال ـ کدام‌یك از دو روش فوق را ترجیح می‌دهید.

مثال ۲ ـ حل معادلهٔ : $x^{۲} + ۶x + ۱۸۷ = ۰$

چون مانند مثال ۱ عمل‌کنیم حاصل می‌شود:

$$(x+۳)^{۲} = -۱۷۸$$

چون دراین مثال طرف راست معادلهٔ اخیر منفی است معادله ریشه ندارد (چرا؟)

مثال ۳ ـ حل معادلهٔ : $۳x^{۲} + ۴x = ۱۵$

دراین مثال نمی‌توان طرف چپ معادله را تکمیل‌کرد تا مربع یك دوجمله‌ای درجهٔ اول شود، زیرا ضریب $x^{۲}$ مساوی با ۱ نیست . پس ابتدا دوطرف معادله را به‌ضریب $x^{۲}$ یعنی ۳ تقسیم می‌کنیم حاصل می‌شود:

$$x^{۲} + \frac{۴}{۳}x = ۵$$

اکنون طرف چپ معادلهٔ اخیر را تکمیل می‌کنیم تا مربع شود و برای این‌کار مربع نصف ضریب x یعنی $\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲}$ را به‌هر دو طرف معادله می‌افزاییم :

$$x^{۲} + \frac{۴}{۳}x + \left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲} = ۵ + \left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲} = ۵ + \frac{۴}{۹}$$

و یا

$$\left(x + \frac{۲}{۳}\right)^{۲} = \frac{۴۹}{۹}$$

چون طرف راست معادلهٔ اخیر مثبت است معادله ریشه‌های حقیقی دارد ، زیرا می‌توان از دوطرف آن جذرگرفت ونوشت:

$$x + \frac{۲}{۳} = \pm\sqrt{\frac{۴۹}{۹}} = \pm\frac{۷}{۳}$$

پس ریشه‌های معادلهٔ مفروض عبارتند از :

$$x' = +\frac{۷}{۳} - \frac{۲}{۳} = \frac{۵}{۳} \qquad \text{و} \qquad x'' = -\frac{۷}{۳} - \frac{۲}{۳} = -۳$$

تمرین

معادلات زیر را با روش تشکیل مربع کامل حل کنید :

۱ $x^{۲} + x = ۱۲$ ۲ $x^{۲} + x = -۱۲$

۳ $x^2-39=10x$ ۴ $x^2+39x=82$

۵ $x^2+18=9x$ ۶ $x^2-18=9x$

۷ $12x=11+x^2$ ۸ $12x+11=x^2$

۹ $x^2+\frac{2}{3}x=7$ ۱۰ $x^2-\frac{4}{5}x-\frac{1}{5}=0$

۱۱ $x^2-\frac{3}{2}x=-\frac{1}{2}$ ۱۲ $x^2-\frac{x}{6}=\frac{7}{6}$

۱۳ $2x^2+5x=3$ ۱۴ $3x^2+10x=8$

۱۵ $7x^2-5x=2$ ۱۶ $4x^2=15-7x$

III ـ دستور حل معادلهٔ کامل درجهٔ دوم

درشماره‌های ۶ و ۷ روش حل معادلهٔ درجهٔ دوم کامل را به‌وسیلهٔ تشکیل مربع دیدیم . اینك از همین روش برای به‌دست آوردن دستورکلی حل معادلهٔ درجهٔ دوم استفاده می‌کنیم.

۸ـ حل معادلهٔ : $ax^2+bx+c=0$ (۱)

چون a مخالف با صفر فرض می‌شود (چرا؟) معادلهٔ (۱) را می‌توان چنین نوشت :

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$

و یا

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a} \qquad (2)$$

برای آن‌که طرف چپ معادلهٔ (۲) را تکمیل کنیم تا مربع یك دو جمله‌ای درجهٔ اول شود، همان‌گونه‌که درشمارهٔ ۶ گفتیم به‌دوطرف معادله مقدار $\frac{b^2}{4a^2}$ (یعنی مربع نصف‌ضریب x) را می‌افزاییم حاصل می‌شود:

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

و یا

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \qquad (3)$$

معنی معادلهٔ (۳) این است‌که $(x+\frac{b}{2a})$ مساوی باجذرعبارت $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ است . واین عبارت وقتی جذر دارد که مثبت یا صفر باشد . اما مخرجش مثبت است و بنابراین علامتش به‌علامت صورت آن بستگی دارد. پس سه‌حالت تمیز می‌دهیم:

اولا $b^2-4ac>0$

دراین حالت طرف راست معادلهٔ (۳) مثبت است و دو ریشهٔ دوم دارد. پس :

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

بنابراین معادلهٔ (۱) دارای دو ریشهٔ زیر است :

$$x' = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

که می‌توان آنها را یکجا به‌صورت زیر نوشت:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ثانیاً $b^2 - 4ac = 0$

در این حالت داریم : $x + \frac{b}{2a} = 0$ و از آنجا $x = -\frac{b}{2a}$

تبصره ـ دستورهایی‌که درحالت اول به‌دست آوردیم دراین حالت نیز صادق هستند:

$$x' = \frac{-b + 0}{2a} = -\frac{b}{2a} \quad و \quad x'' = \frac{-b - 0}{2a} = -\frac{b}{2a}$$

ملاحظه می‌شودکه دراین‌حالت دو ریشهٔ معادله با هم مساوی هستند. به این دلیل‌است که می‌گویند درحالت $b^2 - 4ac = 0$ معادلهٔ (۱) دارای دو ریشهٔ متساوی یا یك ریشهٔ مضاعف است .

ثالثاً $b^2 - 4ac < 0$

دراین حالت کسرطرف راست معادلهٔ (۳) منفی است و جذر حقیقی ندارد و معادلهٔ (۱) درمجموعهٔ R ریشه ندارد.

۹ـ مبین معادلهٔ درجهٔ دوم ـ عبارت $b^2 - 4ac$ را که وجود ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2 + bx + c = 0$ به‌علامت آن بستگی‌دارد مبین معادله می‌نامند و آن‌رامعمولا با حرف یونانی Δ نمایش می‌دهند.

۱۰ـ خلاصه ـ از آنچه‌گذشت نتیجه می‌شودکه درمعادلهٔ :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

اولا اگر $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ ، معادله دارای دوریشهٔ نامتساوی است.

ثانیاً اگر $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ، معادله دارای یك ریشهٔ مضاعف مساوی با $-\frac{b}{2a}$ است.

ثالثاً اگر $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ، معادله درمجموعهٔ R ریشه ندارد.

پس برای حل‌کردن معادلهٔ (۱) ابتدا $\Delta=b^{2}-4ac$ را حساب می‌کنیم. اگر Δ مثبت بود ریشه‌های معادله از دستورهای کلی به‌دست می‌آیند. اگر Δ صفر بود معادله دارای ریشهٔ مضاعف $x=-\frac{b}{2a}$ است. اگر Δ منفی بود معادله جواب حقیقی ندارد.

مثال ۱ ـ حل‌معادلهٔ: $2x^{2}+13x-45=0$

ضرایب معادله عبارتند از $a=2$ و $b=13$ و $c=-45$ و مبین معادله مساوی است با:

$$\Delta=(13)^{2}-4\times2\times(-45)=169+360=529$$

چون این مبین مثبت است معادله دارای دو ریشه است‌که عبارتند از:

$$x'=\frac{-13+\sqrt{529}}{4} \quad و \quad x''=\frac{-13-\sqrt{529}}{4}$$

اما $\sqrt{529}=23$ ؛ پس: $x'=\frac{5}{2}$ و $x''=-9$

مثال ۲ ـ حل معادلهٔ: $25x^{2}-30x+9=0$

دراین معادله $a=25$ و $b=-30$ و $c=9$ و

$$\Delta=b^{2}-4ac=(-30)^{2}-4\times25\times9=900-900=0$$

پس معادله دارای یك ریشهٔ مضاعف $-\frac{b}{2a}$ است و داریم:

$$x=-\frac{-30}{2\times25}=\frac{30}{2\times25}=\frac{3}{5}$$

مثال ۳ ـ حل معادلهٔ: $3x^{2}+5x+7=0$

دراین معادله $a=3$ و $b=5$ و $c=7$ و

$$\Delta=b^{2}-4ac=5^{2}-4\times3\times7=-59$$

چون Δ منفی است معادله ریشه ندارد.

۱۱ـ تبصره ـ اگر ضرایب a و c از معادلهٔ $ax^{2}+bx+c=0$ مختلف‌العلامه باشند، $4ac$ منفی و بنابراین $-4ac$ مثبت و مبین $b^{2}-4ac$ مثبت است و معادله دارای دوریشهٔ حقیقی است.

اگر ضرایب a و c مختلف‌العلامه باشند، معادلهٔ $ax^{2}+bx+c=0$ دارای دو ریشهٔ حقیقی است.

توجه‌کنید که شرط مختلف‌العلامه بودن a و c برای وجود دو ریشه کافی هست ولی لازم نیست.

مثال ۱ ـ حل معادلهٔ: $3x^2+17x-5=0$

پیش از آن‌که مبین معادله را تشکیل دهیم ملاحظه می‌کنیم که چون $a=3$ و $c=-5$ مختلف‌العلامه هستند با اطمینان می‌گوییم که این معادله دارای دو ریشه است (این ریشه‌ها را حساب کنید).

مثال ۲ ـ حل معادلهٔ: $6x^2-13x+6=0$

دراین مثال چون a و c متحدالعلامه هستند نمی‌توانیم بگوییم که معادله ریشه دارد یا ندارد و ناچاریم Δ را تشکیل دهیم:

$$\Delta=(-13)^2-4\times 6\times 6=169-144=25$$

چون Δ مثبت است معادله دو ریشه دارد (این دو ریشه را حساب کنید).

۱۲ ـ ساده‌کردن دستورها (دستور b') ـ اگر درمعادلهٔ :

$$ax^2+bx+c=0$$

ضریب جملهٔ درجهٔ اول یعنی b مضربی از ۲ باشد، دستورهای‌حل‌معادله ساده می‌شوند: نصف b را b' می‌نامیم. پس $b=2b'$. دراین‌صورت‌مبین‌معادله چنین نوشته می‌شود:

$$\Delta=(2b')^2-4ac=4b'^2-4ac=4(b'^2-ac)$$

بنابراین

$$\sqrt{b^2-4ac}=\sqrt{4(b'^2-ac)}=2\sqrt{b'^2-ac}$$

عبارت b'^2-ac را مبین ساده شده می‌نامند و آن را با حرف Δ' نشان می‌دهند . در این حالت ریشه‌ها به‌شکل زیر درمی‌آیند:

$$\boxed{x'=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}} \quad \text{:ویا} \quad x'=\frac{-2b'+2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}$$

و

$$\boxed{x''=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}} \quad \text{:ویا} \quad x''=\frac{-2b'-2\sqrt{b'^2-ac}}{2a}$$

مثال ـ حل معادلهٔ: $x^2+2x\sqrt{2}-1=0$

دراین معادله : $a=1$ و $b=2\sqrt{2}$ و $b'=\sqrt{2}$ و $c=-1$

و $\Delta'=b'^2-ac=2+1=3$ و ریشه‌های معادله عبارتند از:

$$x''=-\sqrt{2}-\sqrt{3} \quad \text{و} \quad x'=-\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

۱۳ ـ حل یك مسئلهٔ نمونه

مسئله ـ به‌ازای چه مقادیری از پارامتر m معادلهٔ زیر دارای ریشه است؟

$$(1) \qquad (1-m)x^2+(2m-1)x-(m+2)=0$$

حالت اول ـ اگر $m=1$ از معادلهٔ (۱) معادله‌ای از درجهٔ اول نتیجه می‌گردد که

چنین نوشته می‌شود:
$$x-3=0$$

این معادله در مجموعهٔ R فقط یك جواب دارد : $x=3$ (بحث دربارهٔ ریشهٔ دیگرآن را درسالهای بعد خواهیم دید).

حالت دوم ـ اگر $m\neq 1$ معادلهٔ (۱) از درجهٔ دوم است و برای آن‌که دوریشه (متمایز یا متساوی) داشته باشد، لازم و کافی است‌که مبین آن مثبت یا مساوی با صفر باشد. داریم :

$$c=-(m+2) \quad \text{و} \quad b=2m-1 \quad \text{و} \quad a=1-m$$

و
$$\Delta=b^2-4ac=(2m-1)^2+4(1-m)(m+2)$$

و یا
$$\Delta=4m^2-4m+1-4m^2-4m+8$$

و یا
$$\Delta=-8m+9$$

اولا ـ اگر $\Delta=-8m+9<0$ یعنی $m>\frac{9}{8}$ معادله ریشهٔ حقیقی ندارد.

ثانیاً ـ اگر $\Delta=-8m+9=0$ یعنی $m=\frac{9}{8}$ معادله دارای یك ریشهٔ مضاعف است‌که از دستور $x=-\frac{b}{2a}$ حاصل می‌شود. بنابراین:

$$x'=x''=-\frac{2m-1}{2(1-m)}$$

اگر درتساوی فوق به‌جای m مقدار آن یعنی $\frac{9}{8}$ را قرار دهیم، معلوم می‌شود که:

$$x'=x''=5$$

ثالثاً ـ اگر $-8m+9>0$ یعنی $m<\frac{9}{8}$ معادله دارای دو ریشهٔ متمایز است‌که عبارتند از:

$$x'=\frac{-(2m-1)+\sqrt{-8m+9}}{2(1-m)}$$

$$x''=\frac{-(2m-1)-\sqrt{-8m+9}}{2(1-m)}$$

خلاصهٔ بحث فوق در جدول زیر مندرج است:

m	مقادیر کوچکتر از ۱	↗	۱	↗	$\frac{9}{8}$	↗	مقادیر بزرگتر از $\frac{9}{8}$
Δ	+	+	|	+ +	0	−	−
معادله	دو ریشهٔ متمایز		معادله نتیجه ازدرجهٔ اول است $x=3$	دو ریشهٔ متمایز	معادله ریشهٔ مضاعف دارد $x'=x''=5$	ریشه ندارد	

تمرین

معادلات زیر را حل‌کنید:

۱. $x - x^2 + 42 = 0$

۲. $2x^2 + \frac{9}{16} = x$

۳. $\frac{3x^2}{4} + 2x + \frac{4}{3} = 0$

۴. $x^2 + 64 = 20x$

۵. $2x^2 + 16(2 + x) = 0$

۶. $x^2 - \frac{17x}{6} = \frac{1}{2}$

۷. $\frac{x^2}{3} + \frac{12}{25} = \frac{4x}{5}$

۸. $\sqrt{2}x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{2} = 0$

۹. $(5x - 2)(x + 3) = 7(x - 1)$

۱۰. $(5x - 3)(x - 5) = (2x + 5)^2 + 90$

۱۱. $(x - 4)^2 + (x - 3)^2 = (x - 2)(3x - 16)$

۱۲. $14x^2 - (2x - 11)(5x + 4) - 33x = 32$

۱۳. $(x + 1)(4x - 5) + (x + 2)(3x - 2) = (x + 3)(3x - 1)$

حوزهٔ تعریف هریك از معادلات زیر را تعیین‌کرده معادله را حل کنید و پس‌از حل کردن معادله تحقیق‌کنید که آیا ریشه‌ای که به‌دست آورده‌اید قابل قبول است یا نه.

۱۴. $\frac{1}{x - 2} - \frac{1}{x + 2} = \frac{1}{35}$

۱۵. $\frac{4}{x^2 - 1} + \frac{3}{x + 1} = \frac{2}{x - 1} + 1$

۱۶. $\frac{x - 3}{x - 1} + \frac{x - 1}{x - 3} = \frac{25}{12}$

۱۷. $\frac{2x - 1}{3} + \frac{3}{x - 8} = \frac{x - 5}{x - 8} + 3$

۱۸. $\frac{8x - 3}{x + 3} - 2x = 4 - \frac{3x^2}{x + 3}$

۱۹. $\frac{x + 2}{x - 1} + \frac{x - 4}{2x} = \frac{4}{2x^2 - 2x}$

۲۰. $\frac{x + 3}{x + 2} - \frac{x + 2}{x + 3} = \frac{x^2 - 75}{x^2 + 5x + 6}$

تعیین کنید به‌ازای چه مقداری از m هریك از معادلات زیر دارای ریشهٔ مضاعف است وسپس آن ریشهٔ مضاعف را حساب کنید:

۲۱ $(m+3)x^2+2(3m+1)x+(m+3)=0$

۲۲ $x^2-(2m+3)x+m^2=0$

۲۳ $(m+2)x^2-2(m-1)x+4=0$

m را چنان تعیین کنید که هریك ازمعادلات زیر دارای ریشه‌ای که معین کرده‌ایم باشد و سپس ریشهٔ دیگر را حساب کنید:

۲۴ $(m+1)x^2-2mx+m-5=0$ دارای ریشهٔ ۲ باشد

۲۵ $x^2-2(m+2)x+2m^2+7=0$ دارای ریشهٔ ۵ باشد

۲۶ $x^2-(m+1)x+m^2=0$ دارای ریشهٔ ۱ — باشد

به‌ازای چه مقادیری از m هریك از معادلات زیر دارای ریشه‌های حقیقی است؟

۲۷ $(4m+1)x^2-4mx+m-3=0$

۲۸ $(m-3)x^2-2(3m+1)x+9m-2=0$

فصل ۲

رابطه‌های بین ضریبها و ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم ـ حل نامعادلهٔ درجهٔ دوم

۱ ـ قضیهٔ اصلی ـ **اگرمعادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ دارای دوریشهٔ متمایز یا متساوی باشد، مجموع آنها مساوی‌با $-\frac{b}{a}$ وحاصل‌ضرب آنها مساوی با $\frac{c}{a}$ خواهد بود.**

برهان ـ اولا اگر معادلهٔ درجهٔ دوم دارای دو ریشهٔ متمایز باشد، مبین آن یعنی $\Delta=b^2-4ac$ مثبت است و داریم:

$$x'=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad x''=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

بنابراین:

$$x'+x''=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

و از آنجا:

$$\boxed{x'+x''=-\frac{b}{a}} \qquad (1)$$

و نیز:

$$x'x''=\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$=\frac{(-b)^2-(\sqrt{\Delta})^2}{4a^2}=\frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2}$$

پس:

$$\boxed{x'x''=\frac{c}{a}} \qquad (2)$$

ثانیاً اگر معادلهٔ درجهٔ دوم دارای ریشهٔ مضاعف باشد، یعنی داشته باشیم

$$\Delta=b^2-4ac=0$$

باز روابط (۱) و (۲) صحیح هستند (چرا؟).

مستقیماً نیز می‌توان دیدکه دراین حالت:

$$x'=x''=-\frac{b}{2a} \quad \text{پس} \quad x'+x''=-\frac{b}{a}$$

و $$x'x''=(-\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2}{4a^2}=\frac{c}{a}$$

زیرا دراین حالت $b^2=4ac$.

موارد استعمال قضیهٔ اصلی

الف ـ بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم (بدون حل کردن معادله)

۲ ـ همواره می‌توان بدون حل‌کردن معادلهٔ درجهٔ دوم :

$$(1) \qquad ax^2+bx+c=0 \qquad (a\neq 0)$$

با استفاده از قضیهٔ اصلی فوق در وجود وعلامت ریشه‌های آن بحث‌کرد:

اولا ـ اگر $\boxed{\frac{c}{a}<0}$

در این صورت a و c مختلف‌العلامه هستند و چنان که در شمارهٔ ۱۱ فصل دوم دیدیم معادلهٔ (۱) دارای دو ریشهٔ متمایزاست. این‌دو ریشه مختلف‌العلامه هستندزیرا حاصل‌ضربشان منفی است.

ثانیاً ـ اگر $\boxed{c=0}$

دراین حالت یکی از ریشه‌ها بنابرآنچه درشمارهٔ ۴ فصل دوم دیدیم صفر است و ریشهٔ دیگر مساوی است با $-\frac{b}{a}$ (چرا؟) ، و بنابراین علامت آن مشخص است.

ثالثاً ـ اگر $\boxed{\frac{c}{a}>0}$

دراین حالت باید Δ یعنی مبین معادله را تشکیل داد.

اگر $\Delta<0$ معادله ریشه ندارد.

اگر $\Delta\geq 0$ معادله دارای دو ریشه است‌که چون‌حاصل‌ضربشان مثبت است متحدالعلامه هستند وعلامت مشترك آنها علامت مجموعشان یعنی $(-\frac{b}{a})$ است.

۳ـ **تبصره** ـ با درنظرگرفتن حالت $\frac{c}{a}<0$ می‌توان تبصرهٔ شمارهٔ ۱۱ فصل دوم را کامل‌کرد و گفت:

اگر a و c مختلف‌العلامه باشند، معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامه است.

۴ـ **خلاصه** ـ معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^2+bx+c=0$ را درنظر گرفته مبین آن‌را Δ و ریشه‌های آن‌را x' و x'' می‌نامیم:

اولا $\frac{c}{a}<0$	دراین صورت	$x'<0<x''$
ثانیاً $c=0$	»	$x'=0$ و $x''=-\frac{b}{a}$
ثالثاً $\frac{c}{a}>0$ ، $\Delta<0$	دراین صورت معادله ریشه ندارد	
ثالثاً $\frac{c}{a}>0$ ، $\Delta>0$ ، $-\frac{b}{a}>0$	در این صورت	$x'>x''>0$
ثالثاً $\frac{c}{a}>0$ ، $\Delta>0$ ، $-\frac{b}{a}<0$	»	$x'<x''<0$

مثال ۱ ـ بحث در وجود وعلامت ریشه‌های معادلهٔ زیر بدون حل‌کردن آن

$$-100x^2+x+57=0$$

چون دراین معادله a و c مختلف‌العلامه هستند معادله دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامه است و چون مجموعشان که مساوی $\frac{1}{100}$ است مثبت می‌باشد پس ریشه‌ای‌که قدر مطلقش بزرگتر است مثبت است.

اگر معادله را حل‌کنیم، درستی بحث فوق معلوم می‌شود:

$$x'=\frac{-1+151}{-200}=-\frac{75}{100} \qquad x''=\frac{-1-151}{-200}=\frac{76}{100}$$

مثال ۲ ـ بحث در وجود وعلامت ریشه‌های معادلهٔ زیر بدون حل‌کردن آن

$$5x^2+35x+2=0 \qquad (1)$$

چون دراین معادله a و c متحدالعلامه هستند نمی‌توانیم حکم‌کنیم‌که معادله ریشه‌دارد یا ندارد و باید مبین معادله را تشکیل دهیم:

$$\Delta=(35)^2-4\times5\times2=1185$$

چون این مبین مثبت است معادله دارای دو ریشهٔ متمایز است. چون حاصل‌ضرب این‌دو ریشه یعنی $\frac{c}{a}=\frac{2}{5}$ مثبت است، دو ریشه متحدالعلامه هستند. چون مجموع ریشه‌ها یعنی $-\frac{b}{a}=-7$ منفی است، هردو ریشه منفی هستند.

خلاصه این‌که معادلهٔ مفروض دارای دو ریشهٔ منفی است.

(معادلهٔ (۱) را حل‌کنید و درستی بحث فوق را نتیجه بگیرید).

مثال ۳ ـ چه مقادیری باید به m نسبت داد تا معادلهٔ زیر دارای دو ریشهٔ مثبت‌باشد؟

$$(1-m)x^2-6x+3=0$$

برای آن‌که معادله دارای دو ریشهٔ مثبت باشد، باید:

اولا $\Delta>0$ تا معادله دو ریشه داشته باشد

ثانیاً $\frac{c}{a}>0$ تا دو ریشه متحدالعلامه باشند

ثالثاً $-\frac{b}{a}>0$ تا هر دو ریشه مثبت باشند

پس باید داشته باشیم :

$$(1) \qquad \Delta'=9-3(1-m)>0$$

$$(2) \qquad \frac{c}{a}=\frac{3}{1-m}>0$$

$$(3) \qquad -\frac{b}{a}=\frac{6}{1-m}>0$$

از حل نامساوی (۱) معلوم می‌شود که باید $m>-2$ و از حل نامساوی (۲) معلوم می‌شود که باید $m<1$ و ازحل نامساوی (۳) حاصل‌می‌شود $m<1$ ؛ بنابراین باید داشته باشیم : $\boxed{-2<m<1}$

تمرین

بدون حل کردن معادلات زیر در وجود و علامت ریشه‌های آنها بحث‌کنید:

۱ $x^2+5x+4=0$

۲ $x^2+9x+14=0$

۳ $x^2-6x+5=0$

۴ $x^2-6x+8=0$

۵ $x^2-3x+10=0$

۶ $3x^2-9x+6=0$

۷ $4x^2-4x+8=0$

۸ $7x^2-49x-126=0$

۹ $3x^2+24x+21=0$

۱۰ $7x^2+58x=45$

۱۱ $49x^2+140x-629=0$

$$2x^2+\frac{9}{16}=x \qquad 12$$

۱۳ ـ مقدار m را طوری معین کنید که معادلهٔ :

$$3x^2-10x+m=0$$

اولا دو ریشهٔ متمایز داشته باشد. ثانیاً دوریشهٔ مثبت داشته باشد. ثالثاً یکی ازریشه‌های آن صفر باشد. رابعاً ریشه‌های آن عکس یکدیگر باشند. خامساً دو ریشهٔ مختلف‌العلامه داشته باشد. سادساً ریشه نداشته باشد.

۱۴ ـ مقدار t را طوری معین کنید که معادلهٔ :

$$x^2+4x+t+2=0$$

اولا دو ریشهٔ متمایزداشته باشد. ثانیاً دوریشهٔ منفی داشته باشد. ثالثاً یك ریشهٔ مضاعف داشته باشد. رابعاً یکی از ریشه‌های آن صفر باشد.

۱۵ ـ مقدار m را طوری معین کنید که معادلهٔ :

$$(m+4)x^2-2(m-2)x+m-4=0$$

اولا دو ریشهٔ متمایز داشته باشد . ثانیاً دو ریشهٔ قرینهٔ یکدیگر داشته باشد . ثالثاً دو ریشهٔ عکس یکدیگر داشته باشد. رابعاً یك‌ریشهٔ مساوی صفرداشته باشد و با این فرض مقدار ریشهٔ دیگرش را حساب کنید .

ب ـ تعیین دو عدد که مجموعشان معلوم و حاصل‌ضربشان نیز معلوم باشد

۵ ـ مسئله ـ دوعدد معلوم S و P را در نظر گرفته می‌خواهیم دو عدد α و β بیابیم به‌قسمی که داشته باشیم:

$$(1)\quad \begin{cases}\alpha+\beta=S\\ \alpha\cdot\beta=P\end{cases}$$

اگر دوعدد α و β با این شرایط وجود داشته باشند ، واضح است که می‌توان آنها را ریشه‌های معادلهٔ زیر دانست :

$$(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

و یا

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$$

و یا با درنظرگرفتن روابط (۱) :

$$x^2-Sx+P=0$$

بنابراین:

> اگر دو عدد وجود داشته باشند که مجموعشان S و حاصل ضربشان P باشد، آن دو عدد ریشه‌های معادلهٔ $x^2-Sx+P=0$ هستند.

بحث ـ اولا اگر $S^2-4P>0$ ، مسئله دارای دو جواب است که عبارتند از:

$$\beta=\frac{S-\sqrt{S^2-4P}}{2} \quad \text{و} \quad \alpha=\frac{S+\sqrt{S^2-4P}}{2}$$

ثانیاً اگر $S^2-4P=0$ ، داریم: $\alpha=\beta=\frac{S}{2}$

ثالثاً اگر $S^2-4P<0$ ، مسئله جواب ندارد.

مثال ۱ ـ تعیین دوعدد که مجموعشان $\frac{13}{6}$ و حاصل ضربشان ۱ باشد.

اگر چنین دو عددی وجود داشته باشند، ریشه‌های معادلهٔ زیر هستند:

$$x^2-\frac{13}{6}x+1=0$$

و یا

$$6x^2-13x+6=0$$

و از آنجا

$$x'=\frac{2}{3} \quad \text{و} \quad x''=\frac{3}{2}$$

مثال ۲ ـ تعیین دوعدد که مجموعشان ۱۲ و حاصل ضربشان ۳۶ باشد.

در این حالت $S=12$ و $P=36$. اگر چنین دوعددی وجود داشته باشند، ریشه‌های این معادله هستند:

$$(1) \qquad x^2-12x+36=0$$

داریم: $\Delta=S^2-4P=144-144=0$

و معادلهٔ(۱) که عددهای مطلوب ریشه‌های آن هستند دارای ریشهٔ مضاعف $x'=x''=6$ است. پس دوعدد مطلوب ۶ و ۶ می‌باشند.

تمرین

مجموع دوعدد S و حاصل ضربشان P معلوم است . آن دوعدد را در هریك از حالات زیر حساب کنید:

۱ $\qquad P=221 \quad , \quad S=-30$

۲	$P=26$ ،	$S=15$
۳	$P=6328$ ،	$S=169$

ج ـ تشکیل معادلهٔ درجهٔ دومی که ریشه‌های آن دوعدد معلوم باشند

۶ ـ اگر ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دومی دوعدد معلوم α و β باشند، آن معادله هم‌ارز با دومعادلهٔ زیر است:

$$\begin{cases} x-\alpha=0 \\ x-\beta=0 \end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ مطلوب به‌این صورت است:

$$k(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

که درآن k مقداری ثابت است. معمولا k را مساوی با ۱ اختیار می‌کنند . پس معادلهٔ مطلوب عبارت‌است از:

$$\boxed{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0}$$

مثال ـ می‌خواهیم معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهیم که ریشه‌های‌آن $2m$ و $\frac{m}{2}$ باشند.

اگر ریشه‌ها را x' و x'' بنامیم داریم:

$$x'+x''=2m+\frac{m}{2}=\frac{5m}{2}$$

و

$$x'x''=2m\times\frac{m}{2}=m^2$$

پس معادلهٔ مطلوب عبارت است از:

$$x^2-\frac{5m}{2}x+m^2=0$$

و یا

$$2x^2-5mx+2m^2=0$$

تمرین

معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که ریشه‌هایش دوعدد زیر باشند:

۱ـ $7\ ,\ -3$ ۲ـ $-2\ ,\ -5$

۳ـ $\frac{1}{3}\ ,\ 3$ ۴ـ $-\frac{1}{2}\ ,\ 2$

۵	$۳+\sqrt{۲}\ ,\ ۳-\sqrt{۲}$	۶	$۲-\sqrt{۳}\ ,\ ۲+\sqrt{۳}$
۷	$(a+b)\ ,\ -(a+b)$	۸	$(a+b)\ ,\ (a-b)$
۹	$(a+b)\ ,\ \frac{۱}{a+b}$	۱۰	$\frac{۱}{a+b}\ ,\ \frac{۱}{b-a}$
۱۱	$m+۳\ ,\ \frac{۲m-۵}{۲}$	۱۲	$\frac{m+۱}{m}\ ,\ \frac{m-۲}{m}$
۱۳	$m+\sqrt{m^۲-۳}\ ,\ m-\sqrt{m^۲-۳}$		
۱۴	$\frac{a+b}{a-b}\ ,\ \frac{a-b}{a+b}$		

د ـ محاسبهٔ عباراتی که برحسب ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم متقارن هستند

۷ـ تعریف ـ یك عبارت جبری، که شامل دو حرف a و b باشد، درصورتی برحسب a و b متقارن نامیده می‌شود که اگر a را به b و b را به a تبدیل کنیم، در آن عبارت تغییری حاصل نشود.

مثلا عبارات زیر برحسب a و b متقارن هستند:

$$(a-۱)(b-۱)\quad ,\quad a^۲+b^۲\quad ,\quad \frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}\quad ,\quad a+b$$

سؤال ـ آیا عبارات زیر برحسب a و b متقارن هستند؟ (چرا؟)

$$a^۳+b^۳\quad ,\quad a^۲-b^۲\quad ,\quad \frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}\quad ,\quad a-b$$

ثابت می‌کنند که همواره می‌توان عباراتی را که برحسب x' و x''، یعنی ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم، متقارن باشند برحسب $S=x'+x''$ و $P=x'x''$ حساب کرد. ما این مطلب را با ذکر چند مثال نشان می‌دهیم:

ریشه‌های معادلهٔ: $ax^۲+bx+c=۰$ را x' و x'' و مجموع آنها را S و حاصل ضربشان را P می‌نامیم.

محاسبهٔ $x'^۲+x''^۲$ برحسب S و P.

$$x'^۲+x''^۲=(x'+x'')^۲-۲x'x''=S^۲-۲P$$

محاسبهٔ $\frac{۱}{x'}+\frac{۱}{x''}$ برحسب S و P.

$$\frac{1}{x'}+\frac{1}{x''}=\frac{x'+x''}{x'x''}=\frac{S}{P}$$

محاسبهٔ $x'^3+x''^3$ برحسب S و P.

از اتحاد :

$$(x'+x'')^3=x'^3+x''^3+3x'x''(x'+x'')$$

نتیجه می‌شود:

$$x'^3+x''^3=(x'+x'')^3-3x'x''(x'+x'')=S^3-3PS$$

۸ ـ مسئله ـ می‌خواهیم مقدار m را قسمی معین‌کنیم که معادلهٔ :

$$(1) \qquad x^2+mx+m+7=0$$

دارای دو ریشه باشد که در رابطهٔ:

$$(2) \qquad x'^2+x''^2=10$$

صدق کنند .

حل ـ اگر معادلهٔ (۱) دارای دو ریشهٔ x' و x'' باشد، داریم :

$$x'^2+x''^2=S^2-2P=(-m)^2-2(m+7)$$

و یا

$$x'^2+x''^2=m^2-2m-14$$

و چون این مقدار را در رابطهٔ (۲) قرار دهیم ، حاصل می‌شود:

$$(3) \qquad m^2-2m-24=0$$

از روی این معادله دو مقدار ۴− و ۶+ برای m به دست می‌آید.

به‌ازای $m=-4$ معادلهٔ (۱) به‌صورت $x^2-4x+3=0$ درمی‌آید که ریشه‌های آن $x'=1$ و $x''=3$ هستند و در رابطهٔ (۲) صدق می‌کنند.

به‌ازای $m=6$ معادلهٔ (۱) به‌صورت $x^2+6x+13=0$ درمی‌آید که ریشه‌ندارد.

پس تنها جواب مسئله در مجموعهٔ اعداد حقیقی $m=-4$ است.

تمرین

عبارات زیر را برحسب ضرایب معادلهٔ درجهٔ دوم $2x^2-3x-3=0$ که ریشه‌های آن را x' و x'' فرض می‌کنیم حساب کنید:

۱ $\quad \frac{1}{x'^2}+\frac{1}{x''^2}$ $\qquad$ ۲ $\quad \frac{1}{x'^3}+\frac{1}{x''^3}$

۳ $\quad (x'-3)^2+(x''-3)^2$

۴ $(2x'-3x'')(2x''-3x')$

۵ $\frac{1}{x'^2-2}+\frac{1}{x''^2-2}$

۶ $\frac{x'+3}{x''+1}+\frac{x''+3}{x'+1}$

۷ $(5x'-4x'')(5x''-4x')$

۸ $x'^4+x''^4$

در هریك از مسائل زیر مقدار m را طوری تعیین کنید که ریشه‌های معادلهٔ (۱) در رابطهٔ (۲) صدق کنند:

۹
$$\begin{cases} mx^2-2(m-2)x+m-3=0 & (1) \\ 4(x'+x'')=7x'x'' & (2) \end{cases}$$

۱۰
$$\begin{cases} mx^2+(m-4)x+2m=0 & (1) \\ 2(x'^2+x''^2)=5x'x'' & (2) \end{cases}$$

۱۱
$$\begin{cases} x^2-(2m+1)x+m^2+2=0 & (1) \\ (3x'-5)(3x''-5)=4 & (2) \end{cases}$$

۱۲
$$\begin{cases} (m-1)x^2-2mx+m+1=0 & (1) \\ \frac{1}{x'^2}+\frac{1}{x''^2}=\frac{5}{4} & (2) \end{cases}$$

ه ـ حل یك مسئلهٔ نمونه

۹ـ مسئله ـ مقدار m را طوری معین کنید که معادلهٔ:

$$x^2-(m+5)x-m+6=0 \qquad (1)$$

دارای دو ریشه باشد که در رابطهٔ:

$$2x'+3x''=13 \qquad (2)$$

صادق باشند.

در این گونه مسائل که رابطهٔ مفروض بر حسب x' و x'' متقارن نیست می‌توان ابتدا مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را برحسب m حساب کرد تا دو رابطه به دست آید. این دو رابطه و رابطهٔ مفروض سه معادلهٔ سه مجهولی برحسب x' و x'' و m تشکیل می‌دهند که از حل آنها هم مقدار m و هم ریشه‌های معادله درصورت وجود به دست می‌آیند.

حل ـ بنا به‌فرض باید داشته باشیم:

$$2x'+3x''=13 \qquad (2)$$

ازطرف دیگر درمعادلهٔ (۱) داریم:

$$x'+x''=m+5 \qquad (3)$$

$$x'x''=-m+6 \qquad (4)$$

اینك معادلات (۲) و (۳) را که برحسب مجهولهای x' و x'' از درجهٔ‌اول هستند حل می‌کنیم حاصل می‌شود:

$$x'=3m+2 \quad \text{و} \quad x''=3-2m \qquad (5)$$

این مقادیر را در رابطهٔ (۴) قرار می‌دهیم نتیجه می‌شود:

$$(3m+2)(3-2m)=-m+6$$

و یا

$$-6m^2+6m=0$$

ازاین معادله دومقدار $m=0$ و $m=1$ برای m به‌دست می‌آید.

اگر این مقادیر را در روابط (۵) قرار دهیم، x' و x'' حساب می‌شود:

به‌ازای $m=0$ داریم $x'=2$ و $x''=3$

به‌ازای $m=1$ داریم $x'=5$ و $x''=1$

به‌این ترتیب معلوم می‌شود که مسئله دارای دو دستگاه جواب است.

(تحقیق کنید که ریشه‌های فوق درمعادله صادق هستند)

تمرین

درهریك از تمرینهای زیر مقدار m را تعیین کنید که معادلهٔ (۱) دارای دوریشه باشد که در رابطهٔ (۲) صدق کنند:

۱
$$\begin{cases} x^2-5x+m=0 & (1) \\ 3x'-2x''=0 & (2) \end{cases}$$

۲
$$\begin{cases} x^2-2mx+m+1=0 & (1) \\ x'-2x''=0 & (2) \end{cases}$$

۳
$$\begin{cases} mx^2-2(m-1)x+m=0 & (1) \\ x'+2x''=3 & (2) \end{cases}$$

۴

$$\begin{cases} (m-1)x^2 - 2mx - 3m + 1 = 0 & (1) \\ 2x' + 3x'' = 5 & (2) \end{cases}$$

۵

$$\begin{cases} x^2 - 2mx + 5m - 3 = 0 & (1) \\ x' - 2x'' = 3 & (2) \end{cases}$$

۶

$$\begin{cases} mx^2 - (2m+1)x + m + 1 = 0 & (1) \\ 5x' - 3x'' = 1 & (2) \end{cases}$$

و ـ تجزیهٔ سه جمله‌ای درجهٔ دوم

• ۱ـ سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم عبارتی است به‌صورت :

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad , \quad a \neq 0 \qquad (1)$$

اگر معادلهٔ زیر را درنظر بگیریم :

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (2)$$

ریشه‌های معادلهٔ (۲) را ریشه‌های سه‌جمله‌ای (۱) یاصفرهای سه جمله‌ای (۱) می‌نامند؛ مبین معادلهٔ (۲) مبین سه‌جمله‌ای (۱) نامیده می‌شود.

۱ ۱ـ درشمارهٔ ۳ فصل اول دیدیم‌که اگر داشته باشیم : $a = 1$ ، گاهی می‌توان سه‌جمله‌ای $ax^2 + bx + c$ را به‌حاصل‌ضرب دو دوجمله‌ای درجهٔ اول تجزیه کرد.

اگر a مساوی با ۱ نباشد، برای تجزیهٔ سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم به‌حاصل ضرب عاملهای درجهٔ اول ازقضیهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

قضیه ـ اولا اگر معادلهٔ: $\qquad ax^2 + bx + c = 0 \qquad (1)$

دارای دو ریشهٔ متمایز x' و x'' باشد، سه‌جمله‌ای $ax^2 + bx + c$ به حاصل‌ضرب a در دو یك جمله‌ای درجهٔ اول تجزیه می‌شود و داریم:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')}$$

ثانیا اگر معادلهٔ (۱) دارای یك ریشهٔ مضاعف باشد، سه‌جمله‌ای $f(x)$ به‌حاصل ضرب a در مربع کامل یك دوجمله‌ای درجهٔ اول تبدیل می‌گردد و داریم:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x')^2}$$

برهان ـ اولا فرض می‌کنیم: $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac > 0}$

می‌توان نوشت :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \qquad (2)$$

اما چون Δ بزرگتر از صفر فرض شده است معادلهٔ (۱) دو ریشه دارد وداریم:

$$x'x''=\frac{c}{a} \qquad \text{و} \qquad x'+x''=-\frac{b}{a}$$

پس رابطهٔ (۲) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned}&a[x^{2}-(x'+x'')x+x'x'']\\&=a(x^{2}-xx'-xx''+x'x'')\\&=a[x(x-x')-x''(x-x')]=a(x-x')(x-x'')\end{aligned}$$

یعنی

$$=a(x-x')(x-x'')$$

و قضیه دراین حالت ثابت است.

ثانیاً فرض می‌کنیم: $\boxed{\Delta=b^{2}-4ac=0}$

در این صورت داریم $c=\frac{b^{2}}{4a}$ و بنابراین رابطهٔ (۲) چنین نوشته می‌شود:

$$a(x^{2}+\frac{b}{a}x+\frac{b^{2}}{4a^{2}})=a(x+\frac{b}{2a})^{2}$$

در این حالت معادلهٔ (۱) یك ریشهٔ مضاعف دارد که آن را x' می‌نامیم. می‌دانیم که $x'=-\frac{b}{2a}$ ، پس رابطهٔ اخیر چنین نوشته می‌شود:

$$a(x-x')^{2}$$

و قضیه در این حالت نیز ثابت است.

تبصره ـ درصورتی‌که $\Delta=b^{2}-4ac<0$ ، معادلهٔ (۱) ریشه ندارد و نمی‌توان آن‌را به حاصل‌ضرب عاملهای درجهٔ اول برحسب x تجزیه کرد ، اما چون در ایــن حالت داریم $4ac-b^{2}>0$ ، رابطهٔ (۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$\begin{aligned}ax^{2}+bx+c&=a(x^{2}+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})\\&=a[(x^{2}+\frac{b}{a}x+\frac{b^{2}}{4a^{2}})+(\frac{c}{a}-\frac{b^{2}}{4a^{2}})]\\&=a[(x+\frac{b}{2a})^{2}+\frac{4ac-b^{2}}{4a^{2}}]\end{aligned}$$

و به‌طور خلاصه :

$$a[(x+\frac{b}{2a})^{2}+\frac{4ac-b^{2}}{4a^{2}}] \qquad (3)$$

و بـا توجه به این‌که در رابطهٔ (۳) مقدار داخل کـروشه مجموع دومقدار مثبت (چرا؟) و در نتیجه به ازای جمیع مقادیر x مثبت است ، واضح می‌شود که :

اگـر در یک سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم مقدار $b^۲-۴ac$ منفی باشد ، مقدار آن سه‌جمله‌ای برابر است با حاصل‌ضرب a در یک عبارت مثبت .

مثال ۱ ـ تجزیهٔ سه‌جمله‌ای : $۶۳x^۲+۲۵x+۲$

ریشه‌های معادلهٔ: $۶۳x^۲+۲۵x+۲=۰$ عبارتند از $x'=-\frac{۱}{۹}$ و $x''=-\frac{۲}{۷}$ ، پس سه‌جمله‌ای $f(x)$ به‌صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$۶۳(x+\frac{۱}{۹})(x+\frac{۲}{۷})=(۹x+۱)(۷x+۲)$$

مثال ۲ ـ تجزیهٔ سه‌جمله‌ای : $g(x)=۵x^۲+۳۰x+۴۵$

مبین معادلهٔ: $۵x^۲+۳۰x+۴۵=۰$ صفر است و ریشهٔ مضاعف این سه جمله‌ای $x'=x''=-۳$ می‌باشد. پس سه‌جمله‌ای به‌صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$۵(x+۳)^۲$$

مثال ۳ ـ سه جمله‌ای: $۳x^۲-۳x+۸$ ریشهٔ حقیقی ندارد (چرا؟) و نمی‌توان آن‌را به حاصل‌ضرب عاملهای درجهٔ اول تجزیه‌کرد ، اما طبق رابطهٔ (۳) می‌توان آن را به‌صورت زیر نوشت :

$$۳x^۲-۳x+۸=۳\left[(x-\frac{۱}{۲})^۲+\frac{۸۷}{۳۶}\right]$$

تمرین

هریک از سه‌جمله‌ایهای زیر را درصورت امکان به‌حاصل‌ضرب عاملهای درجهٔ اول تجزیه کنید:

۱ $۸x^۲+۱۷x+۲$

۲ $۱۰x^۲+۲۱x+۸$

۳ $۴x^۲-۲۱x+۲۰$

۴ $۱۶x^۲-۳۷x+۲۱$

۵ $۲۴x^۲+۵x-۱۴$

۶ $۴x^۲+۳x-۵۲$

۷ $۱۲x^۲+۳۲x+۲۱$

۸ $۱۵x^۲+۲۲x+۸$

۹ $۷x^۲-۲۴x+۲۰$

۱۰ $۴۹x^۲-۱۱۲x+۶۰$

۱۱ $۲۴x^۲+۳۸x-۲۵$

۱۲ $۲۱x^۲+۴x-۷۶$

۱۳ $-۳۳x^۲+۱۰x+۸$

۱۴ $۱۳x^۲-۲x-۴۸$

۱۵ $-۲۵x^۲+۵۸x-۱۶$

۱۶ $-۱۶x^۲-۲۲x+۱۵$

۱۷ $۱۶t^۲+۴۰-۱۳۳t$

۱۸ $-۷۶y+۳۲+۴۵y^۲$

۱۹ $۲۷(\frac{x}{y})^۲-۶۰(\frac{x}{y})+۲۸$

۲۰ $۴۸(\frac{a}{b})-۲۸+۵۵(\frac{a}{b})^۲$

ز ـ علامت دو جمله‌ای درجهٔ اول

۱۲ ـ تعاریف ـ همانطور که می‌دانید دو جمله‌ای درجهٔ اول بر حسب x یك عبارت جبری به صورت $ax+b$ است که در آن ضرایب a و b اعداد معلومی هستند و ضریب a همواره مخالف صفر است.

مثال: $-2x-5$ ، $-3x+7$ ، $-4x$ و غیره.

ریشهٔ دو جمله‌ای درجهٔ اول عددی است مانند x' که چون در دو جمله‌ای به جای x گذاشته شود حاصل دو جمله‌ای صفر شود.

ریشهٔ دوجمله‌ای $2x-5$ عبارت است از $x'=\frac{5}{2}$ و ریشهٔ دو جمله‌ای $ax+b$ عبارت است از $x'=-\frac{b}{a}$.

۱۳ ـ علامت دو جمله‌ای ـ دو جمله‌ای $2x-5$ به ازای $x=4$ مقدار عددی $(+3)$ را اختیار می‌کند. می‌گویند دوجمله‌ای مزبور به ازای $x=4$ مثبت است یعنی علامتش $(+)$ است و به ازای $x=2$ مقدار عددی آن (-1) می‌شود. پس دو جمله‌ای نامبرده به ازای $x=2$ منفی است یعنی علامتش $(-)$ است. مقادیری از x که به ازای آنها $2x-5$ مثبت شود جوابهای نامعادلهٔ $2x-5>0$ یا $x>\frac{5}{2}$ هستند پس دو جمله‌ای $2x-5$ مثبت است هرگاه $x>\frac{5}{2}$ باشد به همین طریق ملاحظه می‌شود که این دو جمله‌ای منفی است اگر $x<\frac{5}{2}$ باشد.

این مطالب در جدول زیر خلاصه شده است:

x	مقادیر کوچکتر از $\frac{5}{2}$		$\frac{5}{2}$	مقادیر بزرگتر از $\frac{5}{2}$	
علامت $2x-5$	$-$	$-$	0	$+$	$+$

۱۴ ـ حالت کلی ـ علامت دو جمله‌ای $ax+b$ به ازای مقادیری از x که بزرگتر از ریشهٔ آن باشند همان علامت ضریب a و به ازای مقادیری از x که کوچکتر از ریشهٔ آن باشند مخالف علامت a است.

چون $x'=-\frac{b}{a}$ است دو جمله‌ای را می‌توان چنین نوشت:

$$ax+b=a(x+\frac{b}{a})=a\left[x-(-\frac{b}{a})\right]=a(x-x')$$

اگر $x-x'$ مثبت یعنی $x>x'$ باشد $a\,(x-x')$ علامت a را دارا خواهد بود و اگر $x-x'$ منفی یعنی $x<x'$ باشد علامت $a\,(x-x')$ مخالف علامت a می‌باشد به طورخلاصه:

x	مقادیر بزرگتراز $-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	مقادیر کوچکتراز $-\frac{b}{a}$
علامت $ax+b$	علامت a	0	علامت $(-a)$

ح - علامت سه جمله‌ای درجهٔ دوم

۱۵ - سه جمله‌ای درجهٔ دوم

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

را درنظر می‌گیریم. به‌طوری‌که در شمارهٔ ۱۰ همین فصل دیدیم، برحسب آن‌که در این سه‌جمله‌ای مقدار b^2-4ac منفی یا صفر یا مثبت باشد، سه‌جمله‌ای ریشه نداشته یا یك‌ریشهٔ مضاعف $x'=-\frac{b}{2a}$ و یا دو ریشهٔ متمایز x' و x'' خواهد داشت و می‌توان آن‌را به‌ترتیب به یکی‌از سه صورت زیر نوشت.

$$(1)\qquad f(x)=ax^2+bx+c=a\left[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$$

$$(2)\qquad f(x)=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2=a(x-x')^2$$

$$(3)\qquad f(x)=ax^2+bx+c=a(x-x')\,(x-x'')$$

واضح است در حالاتی‌که سه جمله‌ای درجهٔ دوم یك ریشهٔ مضاعف یا دو ریشهٔ متمایز داشته باشد، مقدار عددی سه جمله‌ای فقط به ازای این ریشه‌ها برابر با صفر خواهد شد و به ازای سایر مقادیر x مخالف با صفر است.

حال برحسب آن‌که b^2-4ac منفی یا صفر و یا مثبت باشد، برای تعیین علامت سه جمله‌ای سه حالت تمیز می‌دهیم.

حالت اول - $b^2-4ac<0$

در این حالت با توجه به‌تبصرهٔ مربوط به قضیه‌ای‌که ضمن شمارهٔ ۸ همین‌فصل آوردیم، گوییم چون در رابطهٔ (۱) داریم $a\neq 0$ و مقدار داخل‌کروشه به‌ازای جمیع مقادیر x مثبت است، پس سه‌جمله‌ای به ازای هیچ مقدار از x صفر نمی‌شود وعلامت سه‌جمله‌ای دراین حالت همواره همان علامت a می‌باشد.

پس : هرگاه مبین سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم منفی باشد ، علامت سه‌جمله‌ای به ازای جمیع مقادیر x همان علامت a است .

حالت دوم ـ $b^2-4ac=0$

در این حالت با توجه به رابطهٔ (۲) ، سه جمله‌ای به صورت $a(x-x')^2$ درمی‌آید که در آن $(x-x')^2$ به ازای جمیع مقادیر x مثبت بوده و درنتیجه علامت $a(x-x')^2$ همان علامت a است .

پس : هرگاه مبین سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم صفر باشد ، علامت سه‌جمله‌ای به ازای جمیع مقادیر x بغیر از ریشه همان علامت a است (به‌ازای ریشه برابر صفر است)

حالت سوم ـ $b^2-4ac>0$

در این حالت با توجه به رابطهٔ (۳) ، سه جمله‌ای به‌صورت $a(x-x')(x-x'')$ در می‌آید و برای تعیین علامت آن با فرض $x'>x''$ سه حالت تمیز می‌دهیم .

اولا اگر مقدار عددی x از ریشهٔ x' بزرگتر باشد ، $x-x'$ و $x-x''$ هردو مثبت هستند وحاصل‌ضرب آنها هم مثبت است و علامت سه‌جمله‌ای همان علامت a است.

ثانیاً اگر مقدار عددی x از x' کوچکتر ولی از x'' بزرگتر باشد، $x-x'$ منفی ولی $x-x''$ مثبت‌است . پس‌حاصل‌ضرب آنها منفی‌است . اگر a منفی‌باشد ، سه‌جمله‌ای مثبت است و اگر a مثبت باشد ، سه‌جمله‌ای منفی است ، پس علامت سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم مخالف علامت a است .

ثالثاً اگر مقدار عددی x از x'' کوچکتر باشد ، $x-x'$ و $x-x''$ هردو منفی و حاصل ضرب‌آنها مثبت است و علامت سه جمله‌ای همان علامت a می‌باشد .

و بالاخره به ازای $x=x'$ و $x=x''$ سه جمله‌ای درجهٔ دوم صفر می‌شود .

الف : $a>0$ ، $x''<x'$

x	مقادیر کوچکتراز x''	x''		x'	مقادیر بزرگتراز x'
ax^2+bx+c	+	۰	−	۰	+
نتیجه	$x<x''<x'$ علامت سه جمله‌ای علامت a است	صفر	$x''<x<x'$ علامت سه‌جمله‌ای قرینهٔ علامت a است	۰	$x>x'>x''$ علامت سه‌جمله‌ای علامت a است

ب : $a < 0$ ، $x'' < x'$

x	مقادیر کوچکتر از x''	x''		x'	مقادیر بزرگتر از x'
ax^2+bx+c	$-$	0	$+$	0	$-$
نتیجه	$x<x''<x'$ علامت سه‌جمله‌ای علامت a است	صفر است	$x''<x<x'$ علامت سه‌جمله‌ای قرینهٔ علامت a است .	صفر است	$x>x'>x''$ علامت سه‌جمله‌ای علامت a است

پس : هرگاه مبین سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم مثبت باشد ، علامت سه‌جمله‌ای به‌ازای مقادیر عددی x که از هردو ریشه بزرگتر یا ازهردو ریشه‌کوچکتر باشد همان علامت a است. ولی به‌ازای اعدادی که مابین دو ریشه هستند (از یکی‌کوچکتر و از دیگری بزرگترند) ، علامت سه‌جمله‌ای مخالف علامت a است .

به‌طور خلاصه علامت سه‌جمله‌ای درجهٔ دوم همیشه موافق علامت a است مگر وقتی که سه‌جمله‌ای دارای دو ریشه باشد و به‌جای x عددهایی بگذاریم‌که مابین این‌دو ریشه باشند ودر این حالت علامت سه‌جمله‌ای مخالف علامت a خواهد بود البته مقدار سه‌جمله‌ای به‌ازای ریشه‌هایش برابر صفر است .

معمولا مقادیری از x راکه از هردو ریشه بزرگتر یا از هردو ریشه‌کوچکترند مقادیر خارج دو ریشه گویند .

مثال ۱ــ بازاء مقادیر مختلف x ، علامت سه‌جمله‌ای $2x^2-5x-3$ راتعیین کنید

$$2x^2-5x-3=0 \qquad x=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{4} \quad \begin{cases} x'=\dfrac{5+7}{4}=3 \\ x''=\dfrac{5-7}{4}=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

x	مقادیرکوچکتر از $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$		۳	مقادیر بزرگتر از ۳
$2x^2-5x-3$	+	0	−	0	+
	علامت $x<-\frac{1}{2}<3$ سه‌جمله‌ای موافق علامت ۲ یعنی مثبت است	صفر	$-\frac{1}{2}<x<3$ علامت سه‌جمله‌ای قرینه علامت ۲ یعنی منفی است	صفر	$x>3>-\frac{1}{2}$ علامت سه‌جمله‌ای موافق علامت ۲ یعنی مثبت است

مثال ۲ ـ بازاء مقادیرمختلف x ، علامت سه‌جمله‌ای $-2x^2-5x+3$ را تعیین کنید:

$$-2x^2-5x+3=0 \qquad x=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{-4} \left\langle \begin{array}{l} x'=\frac{1}{2} \\ x''=-3 \end{array}\right.$$

x	مقادیر کوچکتر از ۳ −	۳ −		$\frac{1}{2}$	مقادیر بزرگتر از $\frac{1}{2}$
$-2x^2-5x+3$	−	0	+	0	−
نتیجه	بازاء $x<-3<\frac{1}{2}$ علامت سه‌جمله‌ای علامت ۲ − یعنی منفی است	صفر	بازاء $-3<x<\frac{1}{2}$ علامت سه‌جمله‌ای قرینه ۲ − یعنی مثبت‌است	صفر	بازاء $x>\frac{1}{2}>-3$ علامت‌سه‌جمله‌ای موافق علامت۲ − یعنی‌منفی‌است

ط ـ حل نامعادلات درجهٔ دوم

۱۶ ـ هر نامعادله کـه پس‌از نقل تمام جمله‌ها بـه یکطرف و اختصار به یکی‌از دو صورت کلی :

$$ax^2+bx+c<0 \quad (2) \qquad \text{یا} \qquad ax^2+bx+c>0 \quad (1)$$

درآید ، نامعادلهٔ درجهٔ دوم نامیده می‌شود .

مقصود از حل نامعادلات به‌صورت‌های (۱) یا (۲) تعیین همهٔ اعدادی است که چون به‌جای x گذارده شوند طرف اول نامعادلهٔ (۱) را مثبت یا (۲) را منفی کند . به‌عبارت دیگر ، باید مقادیری از x را معین ساخت که به ازای آنها یك سه جمله‌ای درجهٔ دوم مثبت یا منفی باشد .

مثال ۱- مطلوب است حل نامعادلهٔ $x^2+6x-7<0$.

حل- معادلهٔ $x^2+6x-7=0$ دارای دو ریشهٔ $x'=1$ و $x''=-7$ است و چون ضریب جملهٔ درجهٔ دوم مثبت است ، سه جمله‌ای طرف اول بـه ازای عددهایی کـه مابین ۱ و ۷- باشند منفی خواهد بود .

$$-7<x<1$$

مثال ۲- مطلوب است حل نامعادلهٔ $x^2-7x+10>0$.

حل- چون سه جمله‌ای $x^2-7x+10$ دو جواب $x'=5$ و $x''=2$ دارد و ازطرفی ضریب x^2 مثبت‌است، پس به ازای عددهایی که از ۵ بزرگتر باشند یا عددهایی که از ۲ کوچکتر باشند، سه جمله‌ای طرف اول مثبت می‌شود : $x>5$ یا $x<2$

مثال ۳- مطلوب است حل نامعادلهٔ $-x^2+x-4<0$.

حل- مبین سه جمله‌ای طرف اول منفی است پس علامت سه جمله‌ای همواره علامت ضریب x^2 می‌باشد ، یعنی همیشه منفی است ، بنابراین به ازای تمام اعدادی که به x نسبت داده شود نامعادله برقرار است .

۱۷- حل نامعادلاتی که یك‌طرف آنها حاصل‌ضرب چند عبارت درجهٔ اول یا دوم است-

برای حل‌نامعادلاتی که به صورت‌کلی $A\times B\times C\times D\times \ldots >0$ باشند (A ، B ، C ، ...... چند جمله ایهای درجهٔ اول یا دوم‌می‌باشند) علامت هر عبارت را جداگانه معین و همهٔ مقادیر x را که به ازای آنها هریك از عبارتهای مزبور مثبت یا منفی است تعیین‌کرده سپس از روی آنها علامت حاصل‌ضربشان را معین می‌سازیم .

برای سهولت عمل بهتر این است‌که جوابهای هریك از چند جمله‌ایها را معین کنیم و این ریشه‌ها را به‌ترتیبی‌که از کوچکترین آنها شروع و به‌بزرگترین‌آنها ختم شود در جدولی از چپ بـه راست بنویسیم و در فاصلهٔ مابین هـردو عدد متوالی ، علامت هر عبارت و علامت حاصل‌ضرب را معین‌کنیم .

مثال- مطلوب است حل نامعادلهٔ :

$$(x+1)(3-2x)(2x^2-8)>0$$

برای حل نامعادله ، جدول زیر را رسم می‌کنیم :

x	مقادیر کوچکتر از ۲−	۲− تا ۱−	۱− تا $\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$ تا ۲	مقادیر بزرگتر از ۲
علامت $x+1$	−	−	+	+	+
علامت $3-2x$	+	+	+	−	−
علامت $2x^2-8$	+	−	−	−	+
علامت حاصل‌ضرب	−	+	−	+	−

از این جدول معلوم می‌شود که به ازای $-2<x<-1$ و $\frac{3}{2}<x<2$ طرف اول نامعادلهٔ مفروض مثبت می‌باشد .

۱۸- نامعادلات کسری- نامعادلهٔ کسری نامعادله ای‌است به‌صورت $\frac{f(x)}{g(x)}>0$ که صورت و مخرج آن هردو یاتنها مخرج آن شامل حرف مجهول باشد و $g(x)\neq 0$ برای حل این نامعادلات ، حتی‌المقدور بایدصورت ومخرج را به‌حاصل‌ضرب‌عوامل درجهٔاول یادرجهٔ دوم تجزیه کرد ، سپس علامت هرعبارت وعلامت حاصل‌ضرب و درنتیجه علامت کسررا مشخص کنیم.

تبصرهٔ ۱- هیچ وقت در حل نامعادلات کسری نباید از مخرج کسر صرف‌نظر کرد ؛ زیرا این مخرج نیز تغییر علامت می‌دهد و معلوم نیست دو طرف نامعادله را در مقدار مثبت یا منفی ضرب کرده‌ایم ، مگر این‌که مطمئن باشیم‌که علامت مخرج همواره مثبت یا منفی است؛ مثل کسری‌که مخرج آن مجذور کامل باشد که در این صورت علامت‌کسر علامت صورت آن خواهد بود .

تبصرهٔ ۲- درحل نامعادلات‌کسری باید این‌نکته را درنظر داشت‌که علامت حاصل‌ضرب دومقدار ، همیشه با علامت نسبت آنها یکی است . بنابراین بهتر است به جای تعیین علامت کسر $\frac{f(x)}{g(x)}$ علامت حاصل‌ضرب $f(x)\times g(x)$ را معین کنیم

مثال- مطلوب است حل نامعادلهٔ :

$$\frac{-x^2+3x+10}{x^2-1}>0$$

حل- صورت و مخرج کسر طرف اول نامعادله را به حاصل‌ضرب عوامل تجزیه می‌کنیم:

$$-x^2+3x+10=-(x+2)(x-5)$$
$$=(x+2)(5-x)$$
$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

علامت کسر طرف اول نامعادلهٔ مفروض همان علامت حاصل‌ضرب

$$(x+2)(5-x)(x-1)(x^2+x+1)$$

می‌باشد . پس علامت هر پرانتز را جداگانه معین می‌کنیم و نتایج حاصل‌را به‌ترتیب درجدولی می‌نویسیم و فواصلی راکه درآنها حاصل‌ضرب مفروض مثبت است معین می‌کنیم :

x	مقادیر کوچکتر از -2	-2 … ۱	۱ … ۵	۵ مقادیر بزرگتر از ۵
علامت $x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
علامت $5-x$	$+$	$+$	$+$	$-$
علامت $x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
علامت x^2+x+1	$+$	$+$	$+$	$+$
نتیجه	$+$ جواب	$-$	$+$ جواب	$-$

از این جدول معلوم می‌شودکه علامت‌کسر مفروض به‌ازای تمام اعدادکوچکتر از -2 و به ازای مقادیر $1<x<5$ مثبت است .

۱۹ - تبصره - دربسیاری از نامعادلات‌کسری ، حرف مجهول در هردوطرف نامعادله وجود دارد، دراین‌صورت قاعده این است‌که تمام جمله‌ها را به‌یك‌طرف نقل و تمام کسرها را به‌یك مخرج تحویل‌کنیم وحل نامعادله به‌همان‌صورت‌کلی سابق انجام می‌گیرد .

ط - بحث در وجود وعلامت ریشه‌های معادلات درجهٔ دوم پارامتری

۲۰ - پارامتر-عبارت‌است از مقدار معلوم و متغیری‌که ممکن است ضرایب جمله‌های معادله به آن بستگی داشته باشند و می‌توان آن را طوری اختیارکردکه معادله دارای جواب معینی باشد یا درشرایط مخصوصی صدق‌کند. از اینجا معلوم می‌شودکه هر معادلهٔ پارامتری

درحقیقت بی‌نهایت معادله است کـه به ازای مقادیر مختلفی که ممکن است به پارامتر نسبت داد ، به‌وجود می‌آیند .

۲۱ - برای تعیین علامت ریشه‌های یك معادلهٔ پارامتری ، مبین معادله و حاصل‌ضرب و مجموع ریشه‌ها را تشکیل می‌دهیم و علامت هریك‌از آنها را مشخص می‌کنیم و بین هردو مقدار مهم[1] که به‌پارامتر نسبت داده شود ، علامت مبین (Δ) و علامت حاصل‌ضرب دو ریشه (P) و علامت مجموع دو ریشه (S) را تحقیق و علامت ریشه‌ها را مثل معادلات با ضرایب عددی معین می‌کنیم .

۲۲ - مثال ۱- مطلوب‌است بحث در وجود وعلامت ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم زیر برحسب مقادیر مختلف m :

$$f(x)=(m-۳)x^۲-۲mx+m+۲=۰$$

حل- مبین معادله و مجموع وحاصل‌ضرب ریشه‌ها را تشکیل می‌دهیم وعلامت آنهارا معین می‌کنیم .

$$\Delta'=m^۲-(m-۳)\ (m+۲)=m+۶$$

مبین به ازای $m<-۶$ منفی و به ازای $m>-۶$ مثبت است .

حاصل‌ضرب ریشه‌ها عبارت است از: $\dfrac{c}{a}=\dfrac{m+۲}{m-۳}$

علامت $\dfrac{c}{a}$ همان علامت $(m-۳)\ (m+۲)$ است و علامت ایـن عبارت ، بـه ازای $-۲<m<۳$ منفی و به ازای $m>۳$ یا $m<-۲$ مثبت است .

مجموع ریشه‌ها عبارت است از : $-\dfrac{b}{a}=\dfrac{۲m}{m-۳}$

که علامت آن ، همان علامت $m(m-۳)$ می‌باشد وعلامت این‌عبارت، به‌ازای $۰<m<۳$ منفی و به ازای $m>۳$ یا $m<۰$ مثبت است .

مقادیر مهم m عبارتنداز -۶ ، -۲ ، ۰ و ۳ وبنابراین، بحث زیر نتیجه می‌شود:

۱) $m<-۶$ ؛ دراین حالت ، معادله ریشه ندارد .

۲) $m=-۶$ ؛ در این حالت ، مبین صفر و معادله دارای یك ریشهٔ مضاعف است که مقدار آن ، مساوی است با $-\dfrac{b}{۲a}=\dfrac{m}{m-۳}$ که به ازای $m=-۶$ مقدار عددی آن، $\dfrac{۲}{۳}$ است ؛ پس معادله یك ریشهٔ مضاعف مثبت دارد .

---

[1] ـ مقادیر مهم پارامتر ، مقادیری هستندکه مبین معادله یا حاصل‌ضرب دو ریشه یا مجموع دو ریشه به ازای آنها تغییر علامت می‌دهند .

۳) $-6<m<-2$ ؛ در ایـن حالت ، مبین مثبت و $\frac{c}{a}$ مثبت و $-\frac{b}{a}$ مثبت است ؛ پس معادله دارای دو ریشهٔ مثبت است .

۴) $m=-2$ ؛ در این حالت ، حاصل‌ضرب دو ریشه صفر مـی‌باشد و معادله تبدیل می‌شود به‌معادلهٔ عددی $-5x^2+4x=0$ که یك ریشهٔ آن،صفر و یك‌ریشهٔ آن ، $\frac{4}{5}$ است .

۵) $-2<m<0$ ؛ در این حالت ، مبین مثبت و $\frac{c}{a}$ منفی و $-\frac{b}{a}$ مثبت است ؛ پس معادله دو ریشهٔ مختلف‌العلامه دارد و قدر مطلق ریشهٔ مثبت بیشتر است .

۶) $m=0$ ؛ در این‌حالت ، مجموع دو ریشه صفر می‌باشد و معادله تبدیل می‌شود به معادلهٔ عددی $-3x^2+2=0$ که دارای دو ریشهٔ قرینهٔ $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ است.

۷) $0<m<3$ ؛ دراین‌حالت، مبین‌مثبت‌و $\frac{c}{a}$ منفی و $-\frac{b}{a}$ نیز منفی‌است ومعادله دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامه است و قدر مطلق ریشهٔ منفی بیشتر است .

۸) $m=3$ ؛ دراین‌حالت، معادله تبدیل می‌شود به‌معادلهٔ درجهٔ اول $-6x+5=0$ که فقط یك ریشهٔ $x=\frac{5}{6}$ دارد .

۹) $m>3$ ؛ در این‌حالت، مبین مثبت و $\frac{c}{a}$ مثبت و $-\frac{b}{a}$ هم مثبت است و معادله دارای دو ریشهٔ مثبت می‌باشد .

۲۳- تبصره - برای سهولت درك مطلب، بهتر است جدولی تشکیل دهیم ومقادیر مهم پارامتر را به ترتیبی‌که ازکوچکترین آنها شروع و به بزرگترین آنها ختم شود از چپ بـه راست درآن بنویسیم و در فاصلهٔ بین هردو مقدار مهم متوالی ، علامت Δ و $\frac{c}{a}$ و $-\frac{b}{a}$ را مشخص کرده علامت ریشه‌ها را از روی جدول در هر فاصله معین‌کنیم .

۲۴- مثال ۲- مطلوب است بحث در وجود و علامت ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم:

$$(m+1)x^2-8x+m+1=0$$

حل- مبین معادله و مجموع وحاصل‌ضرب ریشه‌ها را تشکیل می‌دهیم :

$$\Delta'=16-(m+1)^2=-m^2-2m+15$$

که به‌ازای $m=-5$ و $m=3$ صفر می‌شود و به‌ازای مقادیر m محصور مابین ۳ و ۵− مثبت و در غیر این موارد منفی است .

$P=\frac{c}{a}=\frac{m+1}{m+1}=1$ همواره مثبت است .

$$S=-\frac{b}{a}=\frac{8}{m+1}$$

که علامت آن، همان علامت عبارت $m+1$ می‌باشد واین عبارت، به ازای $m=-1$ صفر و به ازای $m<-1$ منفی و در غیراین موارد مثبت است.

پس جدول زیر حاصل می‌شود :

m	مقادیرکوچکتر از -5 -5	-1		3 مقادیربزرگتر از 3
Δ	$-$ 0	$+$	$+$	0 $-$
$\frac{c}{a}$	$+$	$+$	$+$	$+$
$-\frac{b}{a}$	$-$	$-$ 0	$+$	$+$
نتیجه	ریشه وجود ندارد	دو ریشهٔ منفی	دو ریشهٔ مثبت	ریشه وجود ندارد
	ریشهٔ مضاعف -1	یک ریشهٔ $x=0$	ریشهٔ مضاعف 1	

تمرین

نامعادله‌های زیر را حل‌کنید :

۱ $\quad \frac{x-5}{4}-\frac{x+8}{3}<\frac{x+11}{6}$

۲ $\quad \frac{7x-3}{8}+\frac{x+31}{4}>\frac{2x+7}{3}$

۳ $\quad -3x^2+2x-1>0$ ۴ $\quad 5x^2+13x-6<0$

۵ $\quad m^2-8m-9<0$ ۶ $\quad -25m^2+20m-4>0$

۷ $\quad 4x^3-10x^2+48x<0$ ۸ $\quad 3x^3-12x^2+9x>0$

۹ $\quad \frac{3}{2x-1}>x+2$ ۱۰ $\quad \frac{m-2}{m-4}>\frac{m+1}{m+3}$

۱۱ $\quad \frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}<1$

m را چنان انتخاب‌کنیدکه نامساویهای زیر به ازای جمیع مقادیر x برقرار باشند :

۱۲ $\quad (m-1)x^2-4x+2m<0$

۱۳ $\quad (m+1)x^2-2(m-1)x+2m-3>0$

۱۴ $mx^2+(m-1)x+m-1<0$

۱۵ $(m-2)x^2+2(2m-3)x+m-6>0$

۱۶ $(4-m)x^2-3x+4+m>0$

m را چنان انتخاب کنید که معادلات زیر دارای ریشهٔ حقیقی باشند :

۱۷ $mx^2+(m-1)x+2m=0$

۱۸ $(3m+1)x^2-(4m-1)x+12m=0$

۱۹ $x^2+(m-3)x-m-5=0$

در وجود و علامت ریشه‌های معادلات زیر برحسب m بحث کنید :

۲۰ $x^2-4x+m=0$

۲۱ $x^2-2mx+3m=0$

۲۲ $mx^2-3x+m=0$

۲۳ $mx^2-2(m+1)x+m-5=0$

فصل ۳

معادلاتی که به‌معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل پذیرند

۱ـ معادلاتی که به‌صورت $A.B.C=0$ هستند ـ درشمارهٔ ۱۸ فصل ۱ دیدیم که ریشه‌های معادلهٔ $A.B.C=0$ که در آن A و B و C عبارات‌جبری هستند عبارتند ازمجموعهٔ ریشه‌های معادلات $A=0$ و $B=0$ و $C=0$ که به‌ازای آنها مقادیر عددی عبارات A و B و C معین هستند.

بنابراین اگر معادلات $A=0$ و $B=0$ و $C=0$ از درجات اول و دوم باشند، با آنچه تاکنون فرا گرفته‌ایم می‌توانیم معادلهٔ $A.B.C=0$ را حل کنیم.

مثال ۱ ـ حل‌معادلهٔ :

$$(2x^2-3x+1)(3x-4)(2x+7)=0$$

این معادله با معادلات زیر هم‌ارز است :

$$\begin{cases} 2x^2-3x+1=0 \\ 3x-4=0 \\ 2x+7=0 \end{cases}$$

بنابراین معادلهٔ مفروض چهار ریشه داردکه عبارتند از :

$$x=1 \quad , \quad x=\frac{1}{2} \quad , \quad x=\frac{4}{3} \quad , \quad x=-\frac{7}{2}$$

مثال ۲ ـ حل معادلهٔ :

$$(2x^2-5x+1)^2-(x^2-5x+6)^2=0$$

این معادله را می‌توان با در نظرگرفتن اتحاد $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ چنین نوشت :

$$(2x^2-5x+1-x^2+5x-6)(2x^2-5x+1+x^2-5x+6)=0$$

و یا :

$$(x^2-5)(3x^2-10x+7)=0$$

ریشه‌های عبارت (x^2-5) عبارتند از $\sqrt{5}$ و $-\sqrt{5}$ و ریشه‌های سه جمله‌ای

$3x^2-10x+7$ عبارتند از ۱ و $\frac{7}{3}$.

پس معادلهٔ مفروض چهار ریشه دارد :

$$x=\frac{7}{3}\ ,\ x=1\ ,\ x=-\sqrt{5}\ ,\ x=\sqrt{5}$$

تمرین

معادلات زیر را حل کنید :

۱ $(3x+2)(4x^2-5)(9x^2-12)=0$

۲ $(x^2-5x+4)(2x^2-7x+3)=0$

۳ $(3x^2+2x+4)^2-x^2(x+8)^2=0$

۴ $(2x^2-5x+7)^2-(x^2-12x+7)^2=0$

۵ $(4x-7)(x^2-5x+4)(2x^2-7x+3)=0$

۶ $(x^3+3x^2-1)^2-(x^3-2x+1)^2=0$

طرف‌چپ هریك ازمعادلات زیررا به حاصل‌ضرب عاملها تجزیه کرده معادله را حل کنید:

۷ $3x^3-7x^2-7x+3=0$

۸ $6x^3-7x^2-7x+6=0$

۹ $3x^3+7x^2-7x-3=0$

۱۰ $5x^3-31x^2+31x-5=0$

۱۱ $2x^3+7x^2+7x+2=0$

۱۲ $x^4-6x^3+6x-1=0$

۱۳ $x^4-5x^3+5x-1=0$

۱۴ $x^4-x^3-x+1=0$

۱۵ $5x^4-26x^3+26x-5=0$

۲ـ معادلهٔ دومجذوری ـ معادلهٔ صحیح درجهٔ چهارمی که بتوان آنرا به‌صورت زیر نوشت :

$$(1)\qquad ax^4+bx^2+c=0$$

معادلهٔ دو مجذوری نامیده می‌شود. ملاحظه می‌شود که این معادلهٔ صحیح درجهٔ چهارمی‌است که

ضرایب جمله‌های درجات سوم و اول آن صفر هستند.

برای حل کردن معادلهٔ فوق x^2 را مساوی با y می‌گیریم $(x^2=y)$ ؛ معمولاً y را مجهول‌معاون می‌نامند و با فرض $x^2=y$ ، معادلهٔ (۱) به‌صورت معادلهٔ زیر که به معادلهٔ حلّال موسوم است نوشته می‌شود:

$$(٢) \qquad ay^2+by+c=0$$

چون y باید مثبت باشد ، به‌ازای هر ریشهٔ مثبت از معادلهٔ (۲) دو ریشهٔ قرینه برای معادلهٔ (۱) حاصل می‌شود.

اگر معادلهٔ حلال ریشهٔ مثبت نداشته باشد ، معادلهٔ دومجذوری ریشه نخواهد داشت.

مثال ۱ ـ حل معادلهٔ : $5x^4+80x^2+32=0$

معادلهٔ حلال که به‌فرض $x^2=y$ به‌دست می‌آید عبارت است از :

$$5y^2+80y+32=0$$

این معادله دارای دو ریشه است زیرا مبین آن $\Delta'=1600-160=1440$ مثبت است . وچون حاصل‌ضرب این دو ریشه یعنی $\frac{32}{5}$ مثبت است دو ریشه متحدالعلامه هستند و چون مجموع آنها یعنی $-\frac{80}{5}$ منفی است هر دو ریشه منفی هستند؛ پس معادلهٔ مفروض ریشه ندارد.

مثال ۲ ـ حل معادلهٔ : $2x^4-13x^2-45=0$

معادلهٔ حلال یعنی : $2y^2-13y-45=0$

دارای دو ریشهٔ مختلف‌العلامه است (چرا؟) و ریشهٔ مثبت آن عبارت است از:

$$y=\frac{13+\sqrt{529}}{4}=9.$$

پس معادلهٔ مفروض دو ریشه دارد: $x'=+3 \quad , \quad x''=-3$

مثال ۳ ـ حل معادلهٔ : $x^4-5x^2+4=0$

معادلهٔ حلال یعنی $y^2-5y+4=0$

دارای دو ریشهٔ مثبت است : $y'=1 \; , \; y''=4$ ، پس معادلهٔ مفروض چهار ریشه دارد: $x_1=1$ ، $x_2=-1$ ، $x_3=2$ ، $x_4=-2$. مجموعهٔ این‌ریشه‌ها را مجموعهٔ‌جواب خوانده آنرا چنین می‌نویسند:

$$\text{مجموعهٔ جواب}=\{-2, -1, 1, 2\}$$

تمرین

هریك از معادلات زیر را حل‌کنید :

۱ $x^4+36=13x^2$ ۲ $x^4-7x^2+12=0$

۳ $۴x^۴ - ۷۳x^۲ + ۱۴۴ = ۰$

۴ $x^۴ + ۲۹x^۲ + ۱۰۰ = ۰$

۵ $x^۴ - ۵x^۲ = ۳۶$

۶ $۹x^۴ - ۴۰x^۲ + ۱۶ = ۰$

۷ $x^۴ + ۴۲ = ۱۳x^۲$

۸ $x^۴ + ۹ - ۱۰x^۲ = ۰$

۹ $۵x^۴ - ۷x^۲ + ۱۰ = ۰$

۱۰ $۲x^۴ - ۱۴x^۲ + ۲۴ = ۰$

۱۱ $x^۴ + ۱۵x^۲ - ۱۶ = ۰$

۱۲ $۱۶x^۴ - ۸a^۴x^۲ + a^۸ = ۰$

۱۳ $x^۴ - ۸x^۲ + ۴ = ۰$

۱۴ $۱۰x^۴ - ۹x^۲ - ۱ = ۰$

راهنمایی ـ ابتدا معادلهٔ حلال را حل کنید و بعد با استفاده از قضیه‌ای که درشمارهٔ ۱۱ فصل ۲ بیان کردیم سه‌جمله‌ای درجهٔ چهارم را به‌حاصل‌ضرب دو سه جمله‌ای درجهٔ دوم‌تجزیه کنید و بعد هریك از سه‌جمله‌ایهای درجهٔ دوم را نیز در صورت امکان به حاصل‌ضرب عاملها تجزیه نمایید.

۱۵ $۳x^۴ - ۷۵x^۲ + ۴۳۲$

۱۶ $x^۴ - ۲x^۲ - ۳$

۱۷ $x^۴ - ۸x^۲ - ۹$

۱۸ $۲۵x^۴ - ۱۰۴x^۲ + ۱۶$

۱۹ $x^۴ - ۱۸x^۲ + ۸۱$

۲۰ $۴x^۴ - ۱۷a^۲x^۲ + ۴a^۴$

۳ ـ معادلات گنگ ـ درشماره ۱ فصل اول دیدیم که اگر در معادله‌ای دست‌کم یك رادیکال شامل مجهول وجود داشته باشد، آن معادله را معادلهٔ گنگ می‌نامند. مانند:

$$\sqrt{۲x+۱} = ۲\sqrt{x-۳} \quad \text{و} \quad x - \sqrt{۲x+۷} = ۴$$

دراین‌کتاب فقط معادلات گنگی را مورد بررسی قرارمی‌دهیم‌که شامل ریشهٔ دوم باشند و خاطرنشان می‌کنیم‌که :

اولا ـ مقدار $\sqrt{A}$ فقط در صورتی معنی دارد که $A \geq ۰$.

ثانیاً ـ برحسب قرارداد مقدار $\sqrt{A}$ نمایش یك عدد مثبت (یا صفر) است که قرینهٔ آن $-\sqrt{A}$ است.

ثالثاً ـ اگر معادله به صورت $f(x) = g(x)$ باشد باید $D_f \cap D_g$ وجود داشته باشد یعنی $D_f \cap D_g \neq \varphi$

رابعاً ـ اگر دوطرف یك معادله را به‌توان دو برسانیم، ممکن است ریشه‌های خارجی وارد معادله شوند

اینك با ذکر چندمثال روش حل این‌گونه معادلات را شرح می‌دهیم :

۴ـ الف ـ معادلات گنگی که فقط شامل یك رادیکال هستند.

مثال ۱ ـ حل معادلهٔ:

$$(1) \qquad x-\sqrt{2x+7}=4$$

رادیکال را دریك طرف معادله قرار می‌دهیم:

$$(2) \qquad x-4=\sqrt{2x+7}$$

طرف راست این معادله ، وقتی معنی داشته باشد، مثبت یا صفر است. پس باید $x-4\geq 0$ یعنی $x\geqslant 4$ تا بتواند ریشهٔ معادلهٔ (۱) باشد . همچنین باید $2x+7\geqslant 0$ یا $x\geqslant -3/5$. که اگر $x\geqslant 4$ نظر تأمین است.

اکنون دوطرف معادلهٔ (۲) را به‌توان دو می‌رسانیم:

$$(x-4)^2=2x+7$$

ویا $$x^2-8x+16=2x+7$$

ویا $$x^2-10x+9=0$$

این معادلـه دارای دو ریشه است : $x'=1$ و $x''=9$ که با توجه به‌آنچه گفته شد $x'=1$ قابل قبول نیست .

تبصره ـ به‌طورکلی اگر A و B دو چند جمله‌ای باشند ، ریشه‌های معادلهٔ $A=\sqrt{B}$ عبارتند از ریشه‌هایی ازمعادلهٔ $A^2=B$ که به‌ازای آنها داشته باشیم : $A\geq 0$.

لزومی ندارد امتحان کنیم که به‌ازای این ریشه‌ها مقدار زیر رادیکال یعنی B مثبت یا صفر هست یا نه . زیرا مقدار B مساوی است با A^2 و نمی‌تواند منفی باشد.

مثال ۲ ـ حل معادلهٔ: $$(1) \qquad x-\sqrt{x}=20$$

ابتدا رادیکال را جدا کرده معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$(2) \qquad x-20=\sqrt{x}$$

طرف راست‌معادلهٔ (۲) وقتی معنی دارد که مثبت یاصفر باشد. پس باید $x-20\geq 0$ و یا $x\geq 20$. (۱)

اکنون دوطرف معادلهٔ (۲) را به‌توان ۲ می‌رسانیم :

$$x^2-40x+400=x$$

ویا $$x^2-41x+400=0$$

این معادله دارای دو ریشهٔ $x'=25$ و $x''=16$ است . که $x'=16$ طبق (۱) قابل قبول نیست .

ب ـ معادلات‌گنگی که شامل بیش ازیك رادیکال هستند .

در این‌گونه معادلات ابتدا به وسیلهٔ به توان رساندن دوطرف معادله عدهٔ رادیکالها را

می‌کاهیم تا بالاخره به یک معادلهٔ صحیح برسیم و آن را حل می‌کنیم . باید ریشه‌هایی را که از این معادلهٔ صحیح به دست می‌آیند در معادلهٔ گنگ مفروض قراردهیم تامعلوم شود که در معادله صدق می‌کنند یاخارجی هستند .

مثال ۱ـ حل معادلهٔ : $\sqrt{2x+1}=2+\sqrt{x-3}$

باید :

$$2x+1\geqslant 0 \text{ و } x-3\geqslant 0$$

در نتیجه

$$(1)\ x\geqslant 3$$

دوطرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم :

$$2x+1=4+4\sqrt{x-3}+x-3$$

رادیکال را جدا می‌کنیم :

$$x=4\sqrt{x-3}$$

باز دوطرف این معادله را به توان ۲ می‌رسانیم :

$$x^2=16(x-3)$$

و یا

$$x^2-16x+48=0$$

این معادله دارای دو ریشه است که عبارتند از $x'=4$ و $x''=12$ و هردو طبق(۱) قابل قبول هستند .

مثال ۲ـ حل معادلهٔ : $\sqrt{4x+1}+\sqrt{x-1}=-4$

این معادله در مجموعهٔ R جواب نـدارد ، زیرا طرف چپ آن مثبت و طرف راست آن منفی است .

مثال ۳ـ حل معادلهٔ : $\sqrt{2+\sqrt{x-5}}=\sqrt{13-x}$

$$13-x\geqslant 0 \text{ یا } x\leqslant 13 \text{ و } x-5\geqslant 0 \text{ یا } x\geqslant 5$$

پس $5\leqslant x\leqslant 13$ باید باشد که خود ۱۳و ۵ هم در معادله صدق نمی‌کنند پس (۱) $5<x<13$ است .

دوطرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم :

$$۲+\sqrt{x-۵}=۱۳-x$$

رادیکال را جدا می‌کنیم :

$$\sqrt{x-۵}=۱۱-x$$

باز دوطرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم :

$$x-۵=۱۲۱-۲۲x+x^۲$$

و یا
$$x^۲-۲۳x+۱۲۶=۰$$

این معادله دارای دو ریشه است : $x'=۱۴$ و $x''=۹$

ریشهٔ $x''=۹$ در معادلهٔ مفروض صدق می‌کند. اما ریشهٔ $x'=۱۴$ طبق (۱) قابل قبول نیست.

تمرین

معادلات زیر را حل کنید و تحقیق کنید که ریشه‌هایی که به دست می‌آورید در معادله صادقند یا نه :

۱ $x+\sqrt{۵x+۱۰}=۸$

۲ $\sqrt{۱۶۹-x^۲}=x-۱۷$

۳ $x-\sqrt{۷-x}=۳$

۴ $x-۲=\sqrt{x^۲-۳x+۱}$

۵ $\sqrt{۲x^۲+۲}=۲x+۲$

۶ $\sqrt{۲x^۲-۵x+۷}=۷+x$

۷ $\sqrt{۹-x^۲}=\sqrt{۱۹-۳x^۲}$

۸ $\sqrt{۶x+۱}=\sqrt{۷x+۴}$

۹ $\sqrt{۱+\sqrt{x^۴-x^۲}}=x-۱$

۱۰ $\sqrt{x+۵}-\sqrt{x+۲}=۱$

۱۱ $\sqrt{۳۶+x}=۲+\sqrt{x}$

۱۲ $\sqrt{x-۳}=۳-\sqrt{x}$

۱۳ $\sqrt{x-۲}-\sqrt{x-۱۴}=۱$

۱۴ $\sqrt{۲x+۱}-\sqrt{x-۱}=۲$

۱۵ $۲\sqrt{۳x-۵}-\sqrt{x+۲}=۵$

۱۶ $\sqrt{۲x+۹}=\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۴}$

۱۷ $\sqrt{x+۴}+\sqrt{x+۲۰}=۲\sqrt{x+۱}$

۱۸ $\sqrt{x+۶}-\sqrt{۷x+۴}=\sqrt{x+۱}$

۱۹ $\sqrt{۲-x}=\sqrt{۱-x}+\sqrt{۳-x}$

معادلات زیر را می‌توانید باانتخاب یك مجهول معاون مناسب حل کنید.

۲۰ $x^۲+۴x-۶=۲\sqrt{x^۲+۴x-۳}$

($x^۲+۴x-۳=y$ را مجهول معاون بگیرید)

۲۱ $\sqrt{x^۲-۲x-۳}+۳=\dfrac{\sqrt{x^۲-۲x-۳}+۷}{۲\sqrt{x^۲-۲x-۳}}$

۲۲ $۲x-x^۲=\sqrt{۶x^۲-۱۲x+۷}$

۲۳ $(۲x+\sqrt{x})^۴+۴(۲x+\sqrt{x})^۲=۵$

۵- دستگاههای معادلاتی کــه حل آنها به حل معادلهٔ درجهٔ دوم منجر می‌شود ـ حل یك دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی راکه مرکب از یك معادلهٔ درجهٔ اول و یك معادلهٔ درجهٔ دوم باشد، می‌توان با حذف یکی از مجهولها بین معادلات مفروض ، به حل یك معادلهٔ درجهٔ دوم یك مجهولی منجر کرد.

مثال ـ حل دستگاه معادلات :

$$\begin{cases} x-۳y=۱ & (۱) \\ x^۲+۴y^۲=۴ & (۲) \end{cases}$$

مقدار x را از معادلهٔ (۱) حساب‌کرده آن را در معادلهٔ (۲) قرار می‌دهیم .

از معادلهٔ (۱) حاصل می‌شود : $x=۱+۳y \quad (۳)$

ومعادلهٔ (۲) چنین نوشته می‌شود: $(۱+۳y)^۲+۴y^۲=۴$

و یا $۱۳y^۲+۶y-۳=۰ \quad (۴)$

این معادله دارای دو ریشه است‌که عبارتنداز :

$$y'=\frac{-۳+۴\sqrt{۳}}{۱۳} \quad و \quad y''=\frac{-۳-۴\sqrt{۳}}{۱۳}$$

چون این مقادیر را در معادلهٔ (۳) قراردهیم ریشه‌های زیر که جوابهای دستگاه مفروض هستند به دست می‌آید :

$$x' = \frac{۴+۱۲\sqrt{۳}}{۱۳} \qquad y' = \frac{-۳+۴\sqrt{۳}}{۱۳}$$

$$x'' = \frac{۴-۱۲\sqrt{۳}}{۱۳} \qquad y'' = \frac{-۳-۴\sqrt{۳}}{۱۳}$$

تمرین

دستگاههای دومجهولی زیر را حل‌کنید :

۱ $\begin{cases} x^۲+y^۲=۵۸۵ \\ x=۸y \end{cases}$ ۲ $\begin{cases} x^۲+۲y^۲=۲۹۷ \\ x-y=۵ \end{cases}$

۳ $\begin{cases} x+y=۱۳ \\ (x+۳)(y+۱۰)=۱۲۰ \end{cases}$ ۴ $\begin{cases} ۲x+۳y=۵۰ \\ (x-y)^۲=۲۵ \end{cases}$

۵ $\begin{cases} ۷x-۴y=۱۳ \\ (x+y)^۲=۲۵۶ \end{cases}$ ۶ $\begin{cases} x+y-۳=۰ \\ x^۲-y^۲=۳ \end{cases}$

۷ $\begin{cases} ۳x-۲y=۴ \\ x^۲+y^۲+۸y-۶x-۱=۰ \end{cases}$

۸ $\begin{cases} x^۲+y^۲+xy=۵۲ \\ x+y=۸ \end{cases}$

۹ $\begin{cases} x^۲+۴xy-۵y^۲+۱۲x+۹۲=۰ \\ ۸x-y=۳ \end{cases}$

۶ـ دستگاههای معادلات متقارن ـ تعریف عبارت جبری متقارن را در شمارهٔ ۷ فصل ۲ صفحهٔ ۲۳ دیدیم .

دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی برحسب x و y را در صورتی متقارن می‌نامند که اگر درهر معادله x را به y و y را به x تبدیل کنیم ، تغییری درآن معادله دستگاه ایجاد نشود .

برای حل دستگاههای دومعادلهٔ دومجهولی متقارن بهتر است ابتدا مجموع و حاصل‌ضرب دومجهول را حساب کنیم و آنها را مجهولهای معاون قرار دهیم.

اگر فرض کنیم $x+y=S$ و $xy=P$ ، آن‌گاه x و y ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم زیر خواهند بود (چرا؟):

$$\boxed{z^2-Sz+P=0}$$

اینك با ذکر مثال روش حل این‌گونه معادلات را شرح می‌دهیم:

مثال ۱ - حل دستگاه:

$$\begin{cases} x+y=10 & (1) \\ x^2+y^2=58 & (2) \end{cases}$$

این دستگاه متقارن است (چرا؟). چون $x+y$ معلوم است، xy را حساب می‌کنیم و برای این کار معادلهٔ (۲) را چنین می‌نویسیم:

$$(x+y)^2-2xy=58$$

و با درنظر گرفتن معادلهٔ (۱) حاصل می‌شود: $xy=21$

بنابراین ریشه‌های دستگاه مفروض عبارتند از ریشه‌های معادلهٔ زیر:

$$z^2-10z+21=0$$

این معادله دو ریشه دارد $z'=3$ و $z''=7$ که یکی از آنها مساوی با x و دیگری مساوی با y است. پس دستگاه مفروض دو دسته جواب دارد: $\begin{vmatrix} x=3 \\ y=7 \end{vmatrix}$ یا $\begin{vmatrix} x=7 \\ y=3 \end{vmatrix}$

مثال ۲ - حل دستگاه:

$$\begin{cases} x^2+y^2=125 & (1) \\ (x-1)(y-1)=36 & (2) \end{cases}$$

(اگر بخواهیم دراین دستگاه مثلا y را حذف کنیم، یك معادلهٔ درجهٔ چهارم برحسب x حاصل می‌شود.)

معادلهٔ (۱) را می‌توان چنین نوشت:

$$(x+y)^2-2xy=125 \qquad (3)$$

و معادلهٔ (۲) چنین نوشته می‌شود:

$$xy-(x+y)=36-1 \qquad (4)$$

اکنون فرض می‌کنیم: $x+y=S$ و $xy=P$ ، دراین صورت معادلات (۳) و(۴) به‌ترتیب به‌صورت زیر در می‌آیند:

$$S^2-2P=125 \qquad (5)$$

$$(۶) \qquad P-S=۳۵$$

اینک P را بین معادلات (۵) و (۶) حذف می‌کنیم ، حاصل می‌شود :

$$S^۲-۲S-۱۹۵=۰$$

از روی این معادله برای S دو جواب به‌دست می‌آید :

$$S=-۱۳ \quad و \quad S=۱۵$$

اولا به‌ازای $S=۱۵$ از روی معادلهٔ (۶) معلوم می‌شود که

$$P=۳۵+۱۵=۵۰$$

بنابراین x و y ریشه‌های معادلهٔ زیر هستند :

$$z^۲-۱۵z+۵۰=۰$$

ریشه‌های این معادله ۵ و ۱۰ هستند پس دستگاه مفروض دارای جوابهای زیر است:

$$\left|\begin{array}{l} x=۵ \\ y=۱۰ \end{array}\right. \qquad و \qquad \left|\begin{array}{l} x=۱۰ \\ y=۵ \end{array}\right.$$

ثانیاً به‌ازای $S=-۱۳$ داریم : $P=۳۵-۱۳=۲۲$

بنابراین x و y ریشه‌های معادلهٔ زیر هستند :

$$z^۲+۱۳z+۲۲=۰$$

ریشه‌های این معادله عبارتند از ۱۱− و ۲− ، بنابراین دستگاه مفروض دارای جوابهای زیر نیز هست:

$$\left|\begin{array}{l} x=-۱۱ \\ y=-۲ \end{array}\right. \qquad \left|\begin{array}{l} x=-۲ \\ y=-۱۱ \end{array}\right.$$

پس روی‌هم‌رفته دستگاه مفروض دارای چهار دسته جواب است.

(تحقیق کنید که هر دسته از این جوابها در دستگاه مفروض صادق است)

تمرین

دستگاههای معادلات زیر را حل کنید :

۱
$$\begin{cases} x+y=۲۰ \\ xy=۶۴ \end{cases}$$

۲
$$\begin{cases} x^۲+y^۲=۲۰۸ \\ xy=۹۶ \end{cases}$$

۳
$$\begin{cases} x^۲+y^۲=۱۷ \\ xy=۴ \end{cases}$$

۴
$$\begin{cases} x+y=۳ \\ x^۲+y^۲=۲۹ \end{cases}$$

۵
$$\begin{cases} x+y=12 \\ x^2+xy+y^2=109 \end{cases}$$

۶
$$\begin{cases} x+y=3 \\ \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-\frac{29}{10} \end{cases}$$

۷
$$\begin{cases} 2(x+y)+x^2+y^2=2 \\ xy+x^2+y^2=13 \end{cases}$$

۸
$$\begin{cases} x^2+y^2-(x+y)=48 \\ x+y+xy=31 \end{cases}$$

۹
$$\begin{cases} xy=30 \\ x^2+y^2-2(x+y)=83 \end{cases}$$

۷ـ مسائل عددی درجهٔ دوم

مثال ۱ ـ دوعدد صحیح متوالی بیابید که حاصل‌ضربشان ۱۱ واحد بیش از مجموعشان باشد .

حل ـ دوعدد را x و $x+1$ می‌گیریم. مجموع آنها می‌شود $2x+1$ و بنابرآنچه در صورت مسئله گفته شده معادلهٔ زیر حاصل می‌شود:

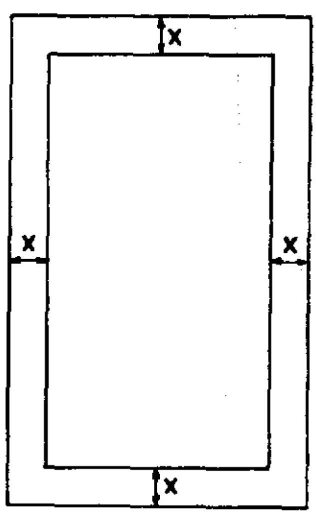
$$x(x+1)-(2x+1)=11$$

و یا
$$x^2-x-12=0$$

و از آنجا $x'=4$ و $x''=-3$.

پس اعداد مطلوب عبارتند از ۴ و ۵ یا ۳− و ۲− .

مثال ۲ ـ درازا و پهنای زمین مستطیل‌شکلی به‌ترتیب ۶۵ و ۴۰ متر است . می‌خواهیم در چهارطرف این زمین چهار راهرو به‌پهنای متساوی ایجاد کنیم به‌قسمی که مساحت قسمت باقیماندهٔ زمین ۲۰۰۰ متر مربع باشد. پهنای مشترك راهروها را معین کنید .



حل ـ اگر پهنای مشترك راهروها را x بگیریم، از روی شکل واضح است که درازا و پهنای قسمت باقیماندهٔ زمین به ترتیب $(65-2x)$ و $(40-2x)$ خواهد بود ، و بنابرآنچه درصورت مسئله گفته شده معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$(40-2x)(65-2x)=2000$$

و یا
$$2x^2-105x+300=0$$

این معادله دارای دو ریشه است که عبارتند از :

$$x = \frac{105 \pm \sqrt{8625}}{4}$$

و یا $x' = 3/03$ و $x'' = 49/47$

واضح است که ریشهٔ $x'' = 49/47$ قابل قبول نیست. پس تنها جواب مسئله $x = 3/03$ است .

تمرین

۱ ـ عدد ۲۷ را به دو قسمت کنید به قسمی که حاصلضربشان ۹۲ باشد.

۲ ـ حاصلضرب دو عدد صحیح متوالی ۵۶ است؛ آن دو عدد را بیابید.

۳ ـ مجموع مربعات سه عدد صحیح متوالی ۷۷ است؛ آن اعداد را حساب کنید.

۴ ـ عددی بیابید که مربع آن ۴۲ واحد بیش از خود آن عدد باشد.

۵ ـ کدام عدد است که مجموع آن با عکسش مساوی با $\frac{17}{4}$ است؟

۶ ـ دو عدد صحیح متوالی بیابید که مجموع مربعاتشان ۵۴۵ باشد.

۷ ـ عددی بیابید که اگر ۱۰ واحد به سه برابر آن بیفزاییم حاصل مساوی با مربع همان عدد شود.

۸ ـ دو عدد بیابید که نسبتشان $\frac{4}{7}$ و مجموع مربعاتشان ۳۱۸۵ باشد .

۹ ـ مساحت یك مستطیل ۵۱ متر مربع و محیط آن ۴۰ متر است. درازا و پهنای آن را حساب کنید .

۱۰ ـ وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۱۷ متر و تفاضل اضلاع زاویهٔ قائمهٔ آن ۷ متر است ؛ طول دو ضلع زاویهٔ قائمهٔ آن را حساب کنید.

۱۱ ـ مجموع ارقام یك عدد دو رقمی ۱۰ است و رقم دهگان آن ۲ واحد کمتر از مربع رقم یکان آن می‌باشد. آن عدد را معین کنید.

بخش دوم

رشته‌های اعداد

فصل ۱

تصاعد حسابی

I ـ رشته‌های اعداد

۱ـ رشتهٔ عددهای طبیعی ـ اگرعددهای طبیعی کوچکتراز ۱۱ را به‌ترتیب عددی از چپ به‌راست دنبال یکدیگر بنویسیم و هر دو عدد متوالی را با یك «,» از هم جداکنیم، رشتهٔ عددهای طبیعی کوچکتر از ۱۱ حاصل می‌شود:

۱ , ۲ , ۳ , ۴ , ۵, ۶ , ۷ , ۸ , ۹ , ۱۰

هریك از اعداد فوق را یك جمله از این رشته می‌نامند . رشتهٔ فوق متناهی است و ده جمله دارد وهریك از جمله‌های آن دارای مرتبهٔ معینی است مثلا ۴ جملهٔ چهارم رشته است.

اگر بخواهیم رشتهٔ عددهای طبیعی کوچکتر از ۱۰۰ را بنویسیم، چون عدهٔ جمله‌های آن زیاد است به‌جای آن‌که همهٔ جمله‌ها را بنویسیم می‌توان به‌طورخلاصه چنین نوشت:

۱ , ۲ , ۳ , ... , ۹۹

معنی سه‌نقطه‌ای‌که بین ۳ و ۹۹ گذاشته شده این‌است‌که باید عددهای از چهار تا نودو هشت را به‌ترتیب به‌جای نقطه‌ها نوشت .

اگر بخواهیم رشتهٔ نامتناهی عددهای طبیعی را نشان دهیم، چنین می‌نویسیم:

۱ , ۲ , ۳ , ... , n , ...

دراینجا n را که یك عدد طبیعی نامشخص فرض شده **جملهٔ عمومی** یا **جملهٔ مرتبهٔ n** یا **جملهٔ nام** رشته می‌نامند . مقصود ازنقطه‌هایی‌که درسمت چپ و راست n نوشته شده این‌است که باید بعد از ۳ همهٔ عددهای طبیعی بزرگتر از ۳ را بنویسیم تا به n برسیم و بعد از n نیز باید عددهای طبیعی بزرگتر از n را به‌ترتیب دنبال یکدیگر بنویسیم.

۲ـ رشته‌های دیگر اعداد ـ اگر مطابق با قاعدهٔ معینی نظیر هر یك از عددهای طبیعی یك عدد دیگر یافته آنها را به‌ترتیب از چپ به‌راست دنبال یکدیگر بنویسیم و هر دو عدد متوالی را با یك «,» از هم جدا کنیم، یك رشته عدد به‌دست می‌آید.

به‌عبارت دیگر : برای آن‌که بتوانیم یك رشته عدد تشکیل دهیم، باید قانونی در دست داشته باشیم به‌قسمی‌که اگرمرتبهٔ جمله‌ای از رشته معلوم باشد، با به‌کاربردن آن قانون بتوان‌آن جمله را به‌دست آورد.

مثال ۱ ـ اگر n یك عدد طبیعی فرض شود، چون $۲n$ همیشه زوج است می‌توان $۲n$ را جملهٔ nام رشتهٔ نامتناهی عددهای زوج دانست. مثلا جملهٔ پنجم رشتهٔ عددهای زوج عبارت است از ۲×۵ یعنی ۱۰ و رشتهٔ عددهای زوج چنین نوشته می‌شود :

$$۲\,,\,۴\,,\,۶\,,\,\cdots\,,\,۲n\,,\,\cdots$$

توجه کنیدکه هرجمله از رشتهٔ فوق را می‌توان با افزودن عدد ۲ به جملهٔ پیش از آن به‌دست آورد.

تمرین

پنج جملهٔ اول هریك از رشته‌هایی راکه جملهٔ nام آن در زیر معین شده است بنویسید (فراموش نکنید که n عددی طبیعی فرض می‌شود $n \in N$)

۱ $\dfrac{n}{n+۱}$

۲ $\dfrac{n}{n+۳}$

۳ $\dfrac{n-۱}{n}$

۴ $\dfrac{\sqrt{n}}{n+۱}$

۵ $(n^۲-۱)$

۶ $\dfrac{۱}{n^۲+۱}$

۷ $\dfrac{n^۲}{n+۱}$

۸ ۱^n

۹ ۳^n

۱۰ $(-۱)^n$

۱۱ $\dfrac{(-۱)^n}{n}$

۱۲ $\dfrac{n^۲}{۲^n}$

۱۳ $n^۲+۲n$

۱۴ $(n-۲)^۲$

۱۵ $\dfrac{n^۲}{(n+۱)^۲}$

۱۶ $\left(۱+\dfrac{۱}{n}\right)^n$

۱۷ـ پنج جملهٔ اول از آغاز رشتهٔ مضربهای عدد ۷ را بنویسید .

۱۸ـ جملهٔ nام رشته‌ای عبارت است از $t_n=\dfrac{۵n+۲}{۳n-۵}$. کدام جمله از این رشته مساوی با ۲ است؟

۱۹ـ جملهٔ nام یك رشته مساوی است با $\dfrac{n^۲-۲۵}{۱۰n}$. کدام جمله ازاین رشته مساوی با صفر است؟

۲۰- جملهٔ عمومی رشته‌ای عبارت است از $t_n=\frac{n+۳}{۲n+۷}$. آیا جمله‌ای از این رشته هست که مساوی با $\frac{۱}{۳}$ باشد؟ (چرا؟)

۲۱- جملهٔ nام یک رشته مساوی است با $\frac{۳n(n-۵)}{n-۱}$. ($n\neq۱$) کدام جمله از این رشته مساوی با ۲۶ است؟ (چرا یکی از دو جوابی که برای n به‌دست می‌آید قابل قبول نیست؟)

۲۲- تعریف تابع را در کتاب ریاضیات **جدید** دیده‌اید . آیا جملهٔ عمومی یک رشته از اعداد را می‌توان قانون تابعی دانست که دامنهٔ آن تابع مجموعهٔ عددهای طبیعی و حوزهٔ آن مجموعهٔ عددهای حقیقی باشد ؟

II ـ تصاعد حسابی

۳- تعریف ـ تصاعد حسابی رشته‌ای است که هر جملهٔ آن با افزودن عددی ثابت (مخالف با صفر) به‌جملهٔ پیش‌از آن به‌دست آید .

عدد ثابت مذکور را تفاضل مشترک یا قدرنسبت تصاعد حسابی می‌نامند.

مثال ـ هریک از رشته‌های اعداد زیر یک تصاعد حسابی است :

(الف) $۳, ۷, ۱۱, ۱۵, ۱۹, \ldots$

(ب) $۵, \frac{۱۷}{۳}, \frac{۱۹}{۳}, ۷, \frac{۲۳}{۳}, \ldots$

(ج) $۱۰, ۷, ۴, ۱, -۲, \ldots$

(د) $۲, ۱/۵, ۱, ۰/۵, ۰, -۰/۵, \ldots$

درتصاعد حسابی (الف) جملهٔ اول ۳ و قدرنسبت ۴ است.

در تصاعد حسابی (ب) جملهٔ اول ۵ وقدرنسبت $\frac{۲}{۳}$ است.

در تصاعد حسابی (ج) جملهٔ اول ۱۰ و قدرنسبت ۳− است.

درتصاعد حسابی (د) جملهٔ اول ۲ و قدرنسبت ۰/۵− است.

۴- تعریف ـ اگر قدرنسبت تصاعد حسابی مثبت باشد، آن تصاعد را صعودی و اگر منفی باشد، تصاعد مزبور را نزولی می‌نامند.

درمثالهای شمارهٔ قبل تصاعدهای (الف) و (ب) صعودی وتصاعدهای (ج) و(د) نزولی هستند .

اگرفقط چندجمله متوالی ازیک تصاعد حسابی رادرنظرگیریم ، دراین‌صورت تصاعد دارای یک جملهٔ اول و یک جملهٔ آخر است و آن‌را تصاعد حسابی متناهی می‌نامند.

مثلا تصاعد حسابی

$$5 , 11 , 17 , 23 , 29$$

یك تصاعد حسابی متناهی است که پنج جمله دارد. جملهٔ اول آن ۵ و جملهٔ آخرش ۲۹ است.

۵ـ تبصره ـ واضح است که قدر نسبت هر تصاعد حسابی به‌این طریق به‌دست می‌آید که یك جملهٔ دلخواه آن‌را از جملهٔ مابعد آن کم‌کنیم.

تمرین

قدر نسبت هریك از تصاعدهای حسابی زیر را معین‌کنید:

۱ $\quad 1 , 2 , 3 , 4 , \dots$

۲ $\quad 17 , 21 , 25 , \dots$

۳ $\quad 23 , 20 , 17 , \dots$

۴ $\quad 2 , 0 , -2 , \dots$

۵ $\quad -6 , -1 , 4 , \dots$

۶ ـ جملهٔ اول یك تصاعد حسابی ۳ و قدر نسبت آن $-\frac{1}{3}$ است. پنج جملهٔ اول‌آن را بنویسید.

۷ ـ جملهٔ سوم یك تصاعد حسابی ۴ و قدرنسبت آن $-\frac{3}{2}$ است. شش نخستین جملهٔ آن تصاعد را بنویسید.

۸ ـ مقدار a را طوری تعیین‌کنید که رشتهٔ زیر یك تصاعد حسابی باشد:

$$a , 4a , 6a+5 , \dots$$

۹ ـ مقدار x را طوری تعیین کنید که رشتهٔ زیر یك تصاعد حسابی باشد و سپس چهار جملهٔ اول از تصاعد را بنویسید:

$$4-x , 3+2x , 6+7x , \dots$$

۶ـ دستور تعیین جملهٔ nام تصاعد حسابی ـ جملهٔ اول تصاعد حسابی را t_1 و قدر نسبت آن را r می‌نامیم. بنا به‌تعریف تصاعد حسابی داریم:

جملهٔ اول $= t_1$

جملهٔ دوم $= (t_1 + r)$

جملهٔ سوم $= (t_1 + r) + r = (t_1 + 2r)$

جملهٔ چهارم $= (t_1 + 2r) + r = (t_1 + 3r)$

جملهٔ پنجم $= (t_1 + 3r) + r = (t_1 + 4r)$

دیده می‌شود که ضریب r در هر جمله یکی کمتر از عددی است که مرتبهٔ آن جمله را مشخص می‌کند (زیرا r برای نخستین بار برای تعیین جملهٔ دوم بـه t_1 افزوده شده است).

پس اگر عمل فوق را ادامه دهیم، مثلا جملهٔ هشتم مساوی خواهد بود با :

$$t_8 = t_1 + 7r$$

و جملهٔ صدم مساوی خواهد بود با : $t_{100} = t_1 + 99r$

بنابراین دستور تعیین جملهٔ nام تصاعد حسابی برحسب t_1 و r عبارت است از :

$$\boxed{t_n = t_1 + (n - 1)r} \quad (1)$$

مثال ـ محاسبهٔ جملهٔ صدم تصاعد حسابی :

$$5, \frac{17}{3}, \frac{19}{3}, 7, \ldots$$

دراین تصاعد $t_1 = 5$ و $r = \frac{2}{3}$ پس جملهٔ صدم که‌آن‌را t_{100} می‌نامیم مساوی‌است با :

$$t_{100} = 5 + (100 - 1) \times \frac{2}{3}$$

$$= 5 + 99 \times \frac{2}{3} = 71$$

۷ ـ حل چند مسئلهٔ نمونه

مسئلهٔ ۱ ـ کدام جمله از تصاعد حسابی زیر مساوی با ۵۶ است؟

$$2, 5, 8, \ldots$$

حل ـ در این تصاعد جملهٔ اول ۲ و قدرنسبت ۳ است. اگر فرض کنیم که جملهٔ nام این تصاعد ۵۶ است مطابق با دستور فوق داریم:

$$t_n = t_1 + (n - 1)r$$

$$t_1 + (n - 1)r = 56$$

یعنی $2 + (n - 1) \times 3 = 56$

و یا $2 + 3n - 3 = 56$

و از آنجا $n = 19$

پس جملهٔ نوزدهم تصاعد مساوی با ۵۶ است .

مسئلهٔ ۲ ـ جملهٔ دهم یك تصاعد حسابی مساوی با ۴۳ــ و جملهٔ هجدهم آن مساوی با ۹۱ــ است؛ این تصاعد را بنویسید.

حل ـ اگر جملهٔ اول تصاعد را t_1 و قدرنسبت آن‌را r بنامیم داریم :

$$\begin{cases} t_{10}=t_1+9r=-43 & (1) \\ t_{18}=t_1+17r=-91 & (2) \end{cases}$$

چون دوطرف تساوی (۱) را نظیر به‌نظیر از دوطرف تساوی(۲)کم‌کنیم، حاصل‌می‌شود: $8r=-48$ و از آنجا $r=-6$. و چون این مقدار را مثلا در تساوی (۱) به‌جایr قرار دهیم، معلوم می‌شود $t_1=11$. پس تصاعد حسابی مطلوب عبارت است از :

$$11 , 5 , -1 , -7 , \dots$$

تمرین

جملهٔ ششم و جملهٔ پانزدهم هریك از تصاعدهای حسابی زیر را بنویسید:

۱ $\quad 4 , 7 , 10 , \dots$

۲ $\quad 38 , 33 , 28 , \dots$

۳ $\quad -19 , -15 , -11 , \dots$

۴ $\quad -\frac{1}{2} , 0 , \frac{1}{2} , \dots$

جملهٔ nام هریك از تصاعدهای حسابی زیر را به‌ساده‌ترین صورت بنویسید:

۵ $\quad 1 , 3 , 5 , \dots$

۶ $\quad 5 , 2 , -1 , \dots$

۷ $\quad 0 , -5a , -10a , \dots$

۸ $\quad -2a , 11a , 24a , \dots$

۹ $\quad -(x+y) , 0 , (x+y) , \dots$

۱۰ـ کدام جمله از تصاعد حسابی زیر مساوی با ۱۰۳ است؟

$$7 , 11 , 15 , \dots$$

۱۱ ـ کدام جمله از تصاعد حسابی زیر مساوی با صفر است؟

$$-104 , -91 , -78 , \dots$$

۱۲ ـ جملهٔ اول یك تصاعد حسابی ۱۱ و جملهٔ شانزدهم آن مساوی با ۱۱۶ است .

سه جملهٔ اول این تصاعد را بنویسید.

کدام تصاعد حسابی است که در آن:

۱۳ $t_۴=۲۷$ و $t_۸=۸۲$

۱۴ $t_{۱۷}=۴۸$ و $t_{۳۱}=۹۰$

۱۵ـ در یك تصاعد حسابی داریم : $t_۴+t_{۱۱}=۶۹$ و $t_{۱۱}-t_۴=۳۵$ ؛ آن تصاعد را مشخص کنید.

۸ـ واسطه‌های حسابی (یا عددی) ـ در هر تصاعد حسابی جمله یا جمله‌هایی‌را که بین دو جملهٔ نامتوالی قرار دارند واسطه یا واسطه‌های حسابی (یا عددی) بین آن دو جمله می‌نامند.

مثلا درتصاعد حسابی :

$$۴ , ۶ , ۸ , ۱۰ , ۱۲ , ...$$

عددهای ۶ و ۸ و ۱۰ سه واسطهٔ حسابی بین ۴ و ۱۲ هستند . دراین صورت اصطلاحاً می‌گویند که اعداد ۶ و ۸ و ۱۰ سه واسطهٔ حسابی هستند که بین ۴ و ۱۲ درج شده‌اند.

هرگاه سه جملهٔ متوالی از یك‌تصاعد حسابی را درنظر گیریم، جملهٔ وسط را به‌طورمطلق واسطهٔ حسابی (یا میانگین) بین دوجملهٔ دیگر می‌نامند.

مثلا درتصاعد حسابی :

$$۵ , ۷ , ۹ , ۱۱ , ۱۳ , ...$$

عدد ۱۱ واسطهٔ حسابی (یا میانگین) اعداد ۹ و ۱۳ است.

۹ـ درج واسطه‌های حسابی بین دوعدد ـ مقصود ازدرج m واسطهٔ‌حسابی بین دوعدد معلوم a و b این است که یك‌تصاعد حسابی متناهی تشکیل دهیم که $m+۲$ جمله داشته باشد و a و b به‌ترتیب جمله‌های اول و آخر آن باشند.

معمولا از دوعددی که می‌خواهند بین آنها چند واسطهٔ حسابی درج‌کنند، آن‌را که اول نام می‌برند جملهٔ اول تصاعد حسابی می‌گیرند.

مثال ـ می‌خواهیم واسطهٔ حسابی یا میانگین دوعدد a و b را معین‌کنیم.

حل ـ چون دراینجا به‌طور مطلق ازواسطهٔ حسابی بین دوعدد گفتگو به‌میان آمده‌است، باید یك واسطهٔ حسابی بین a و b درج کنیم. پس تصاعد حسابی مطلوب سه جمله دارد و اگر آن‌را به‌صورت :

$$a , x , b$$

بنویسیم، معلوم می‌شود که :

$$x-a=b-x$$

و از آنجا
$$x=\frac{a+b}{۲}$$

پس : واسطهٔ حسابی (یا میانگین) دوعدد a و b مساوی با نصف مجموع آنهاست.

تمرین

واسطهٔ حسابی(=میانگین) هر زوج از اعداد زیر را حساب‌کنید:

۱	۳ , ۵	۲	۶ , ۴
۳	۳/۲ , ۲/۴	۴	−۳ , ۵
۵	$\frac{۱}{۲}$, $\frac{۱}{۴}$	۶	۰ , −۱
۷	۲a , ۵a	۸	−a , ۵a
۹	۱۱x , −۱۱x	۱۰	(a+۳) , (a+۵)

۱۰ ـ مجموع جمله‌های تصاعد حسابی متناهی ـ یك تصاعد حسابی متناهی را که دارای n جمله باشد درنظر می‌گیریم و جملهٔ اول آن‌را $t_۱$ و جملهٔ آخر آن‌را t_n و قدر نسبت آن‌را r می‌نامیم. می‌خواهیم مجموع جمله‌های این تصاعد را حساب کنیم. این مجموع را S_n می‌نامیم.

واضح است‌که چون جملهٔ آخر را t_n نامیده‌ایم جملهٔ ماقبل آخر (t_n-r) و جملهٔ‌پیش از آن $(t_n-۲r)$ است و غیره . پس می‌توان S_n را چنین نوشت:

$$(۱)\qquad S_n=t_۱+(t_۱+r)+(t_۱+۲r)+\dots+(t_n-۲r)+(t_n-r)+t_n$$

حال اگر جمله‌های این مجموع را به‌عکس ترتیب فوق بنویسیم، حاصل می‌شود:

$$(۲)\qquad S_n=t_n+(t_n-r)+(t_n-۲r)+\dots+(t_۱+۲r)+(t_۱+r)+t_۱$$

اگر تساویهای (۱) و (۲) را عضو به‌عضو با هم جمع‌کنیم و در موقع جمع کردن هر جمله ازطرف راست‌تساوی (۱) را با جملهٔ مقابل‌آن ازطرف راست تساوی (۲) ترکیب نماییم نتیجه می‌شود :

$$۲S_n=\underbrace{(t_۱+t_n)+(t_۱+t_n)+\dots+(t_۱+t_n)}_{\text{(n پرانتز)}}$$

پس داریم :

$$۲S_n = n(t_۱ + t_n)$$

و از آنجا :

$$\boxed{S_n = \frac{n(t_۱ + t_n)}{۲}}$$

پس اگر جملهٔ اول $(t_۱)$ وجملهٔ آخر (t_n) یك تصاعدحسابی‌متناهی معلوم باشد، می‌توان مجموع جمله‌های آن تصاعد را حساب‌کرد.

اما اگر جملهٔ آخرمعلوم نباشد بلکه جملهٔ اول و قدرنسبت و عدهٔ جمله‌ها در دست باشد برای محاسبهٔ مجموع جمله‌ها در دستور فوق به‌جای t_n مقدار آن را برحسب $t_۱$ و r و n (همچنان‌که درشمارهٔ ۷ دیدیم) قرار می‌دهیم، حاصل می‌شود:

$$\boxed{S_n = \frac{n}{۲}[۲t_۱ + (n-۱)r]}$$

تبصره ـ پیش از ذکر چند مثال ابتدا نکتهٔ زیر را خاطرنشان می‌کنیم :

با کمی دقت معلوم می‌شودکه در ضمن محاسبهٔ فوق نتیجهٔ زیر را به‌دست آورده‌ایم:

در هر تصاعد حسابی متناهی مجموع دو جمله که از دو طرف تصاعد به یك فاصله باشند مساوی است با مجموع جملهٔ اول و جملهٔ آخر .

مثلا اگر جملهٔ اول را $t_۱$ و جملهٔ آخر را t_n بنامیم، جملهٔ سوم از طرف چپ مساوی‌با $(t_۱ + ۲r)$ و جملهٔ سوم ازطرف راست مساوی با $(t_n - ۲r)$ و مجموع این دو جمله مساوی با $t_۱ + t_n$ است .

اگر عدهٔ جمله‌های تصاعد حسابی متناهی فرد باشد، جملهٔ وسط که از دو طرف تصاعد به‌یك فاصله است مساوی است با نصف مجموع جمله‌های اول وآخر .

۱۱- مورد استعمال دستورهای فوق

مثال ۱ ـ محاسبهٔ مجموع n نخستین عدد صحیح مثبت .

این مجموع را $A_۱$ می‌نامیم . رشتهٔ عددهای صحیح مثبت یك تصاعد حسابی است که قدرنسبت آن ۱ است پس :

$$A_۱ = ۱ + ۲ + ۳ + \ldots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

(مطابق با کدام دستور؟)

مثال ۲ ـ محاسبهٔ مجموع n نخستین عدد فرد .

رشتهٔ عددهای فرد یك تصاعد حسابی‌است‌که قدرنسبت آن ۲ و جملهٔ اول آن ۱ وجملهٔ

nام آن $(۲n-۱)$ است. پس :

$$۱+۳+۵+\dots+(۲n-۱)=\frac{n(۱+۲n-۱)}{۲}=n^۲$$

یعنی : مجموع n نخستین عدد فرد مساوی است با مربع n .

تمرین

به‌ازای مقادیر معین n ، جملهٔ nام و مجموع n جمله از هریك از تصاعدهای حسابی زیر را حساب کنید:

۱ $(n=۸)$ $۱۱ , ۱۲ , ۱۳ , \dots$

۲ $(n=۲۰)$ $۵ , ۸ , ۱۱ , \dots$

۳ $(n=۷)$ $۲ , ۶ , ۱۰ , \dots$

۴ $(n=۱۱)$ $(۵a-b) , (۴a-۲b) , (۳a-۳b) , \dots$

۵ $(۳p-q) , ۲q , (۵q-۳p) , \dots$

چند جمله از هر یك از تصاعدهای حسابی زیر را باید با هم جمع کرد تا مجموع آنها مساوی با مقدار معین S شود :

۶ $(S=۱۱۰)$ $۲ , ۴ , ۶ , \dots$

۷ $(S=۴۲)$ $۲۱ , ۱۶ , ۱۱ , \dots$

۸ ـ مجموع بیست و یك نخستین جمله از یك تصاعد حسابی مساوی با ۹۰۳ است و جملهٔ هفتم آن ۲۷ می‌باشد. جملهٔ اول و قدرنسبت این تصاعد را حساب کنید .

۹ ـ جملهٔ n ام ومجموع n جملهٔ اول از تصاعد حسابی زیر را حساب‌کنید:

$$۱ , \frac{n-۱}{n} , \frac{n-۲}{n} , \frac{n-۳}{n} , \dots$$

۱۰ ـ جملهٔ nام و مجموع n جملهٔ اول از تصاعد حسابی زیر را حساب‌کنید:

$$\frac{n^۲-۱}{n} , n , \frac{n^۲+۱}{n} , \frac{n^۲+۲}{n} , \dots$$

۱۲ـ طرح مسائل مختلف در بارهٔ تصاعد حسابی ـ در هر تصاعد حسابی متناهی پنج مقدار مهم می‌توان در نظر گرفت که عبارتند از :

t_1 یعنی جملهٔ اول ـ r یعنی قدرنسبت ـ t_n یعنی جملهٔ آخر ـ n یعنی عدهٔ جمله‌ها ـ S یعنی مجموع n جمله .

بین این پنج مقدار صحت دو رابطهٔ زیر را ثابت‌کردیم :

$$\begin{cases} t_n = t_1 + (n-1)r \\ S = \dfrac{n(t_1 + t_n)}{2} \end{cases}$$

بنابراین هر گاه سه مقدار قابل قبول از پنج مقدار فوق در دست باشد ، می‌توان با استفاده از دو دستور فوق دو مقدار دیگر را حساب کرد. (n باید همیشه عدد صحیح مثبت باشد) .

تمرین

۱ ـ پنج جملهٔ متوالی از تصاعد حسابی زیر را معین کنید که مجموع آنها ۱۸۷/۵ باشد :

$$\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{15}{2}, \frac{21}{2}, \ldots$$

۲ ـ تصاعدی حسابی تشکیل دهید که جملهٔ چهارم آن ۴۰ و جملهٔ دوازدهم آن ۵۲ باشد .

۳ ـ در یك تصاعد حسابی مجموع جمله‌های هشتم و چهاردهم مساوی با ۵۰ است و جملهٔ پنجم آن ۱۳ می‌باشد. این تصاعد را مشخص‌کنید .

۴ ـ دریك تصاعد حسابی متناهی عدهٔ جمله‌ها ۱۰ و مجموع جمله‌ها ۲۴۵ و تفاضل جمله‌های اول و آخر ۴۵ است. این تصاعد را مشخص کنید.

۵ ـ مجموع n نخستین عدد صحیح مثبت ۴۹۶ است. n را حساب کنید.

۶ ـ مجموع سه عدد که تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند ۳۳ و حاصل‌ضرب آنها ۱۲۸۷ است. آن سه عدد را معین کنید.

۷ ـ مجموع پنج عدد که تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند ۱۵ و حاصل‌ضربشان ۱۱۵۵ است. این پنج عدد را معین کنید.

۸ ـ مجموع سه عدد که تصاعد حسابی تشکیل می‌دهند ۱۲ و مجموع مربعات آنها ۶۶ است. این اعداد را حساب کنید.

۹ ـ جملهٔ دوازدهم و جملهٔ هشتادوپنجم و جملهٔ آخریك تصاعد حسابی به‌ترتیب ۳۸ و ۲۵۷ و ۳۹۵ است. این تصاعد را مشخص کنید.

فصل ۲

تصاعد هندسی

۱ـ تعریف ـ تصاعد هندسی رشته‌ای است که هر جملهٔ آن با ضرب کردن جملهٔ پیش از آن در عددی ثابت به‌دست آید.

عدد ثابت مذکور را نسبت مشترك یا قدرنسبت تصاعد هندسی می‌نامند.

مثال ـ هر یك از رشته‌های زیر یك تصاعد هندسی است:

(الف) ۲ , ۶ , ۱۸ , ۵۴ , ۱۶۲ , ...

(ب) ۲۲۴ , ۱۱۲ , ۵۶ , ۲۸ , ...

(ج) ۹ , ۱۸− , ۳۶ , ۷۲− , ...

در تصاعد هندسی (الف) جملهٔ اول ۲ وقدرنسبت ۳ است.

در تصاعد هندسی (ب) جملهٔ اول ۲۲۴ وقدرنسبت $\frac{۱}{۲}$ است.

در تصاعد هندسی (ج) جملهٔ اول ۹ وقدرنسبت ۲− است.

اگر فقط چند جمله از یك تصاعد هندسی را درنظر بگیریم، تصاعد دارای یك جملهٔ اول و یك جملهٔ آخر خواهد بود. دراین صورت آن‌را تصاعد هندسی متناهی می‌نامند.

مثلا تصاعد هندسی:

۲ , ۱۰ , ۵۰ , ۲۵۰ , ۱۲۵۰

متناهی است و پنج جمله دارد. جملهٔ اول آن ۲ و جملهٔ آخر آن ۱۲۵۰ است.

۲ـ تبصره ـ واضح است که قدر نسبت هر تصاعد هندسی به این طریق به دست می‌آید که یك جملهٔ دلخواه آن‌را به‌جملهٔ پیش از آن تقسیم کنیم.

مثلا درمثالهای فوق قدرنسبت تصاعد (الف) مساوی است با:

$$\frac{۶}{۲}=\frac{۱۸}{۶}=\frac{۵۴}{۱۸}=\dots=۳$$

و قدرنسبت تصاعد (ب) عبارت است از:

$$\frac{۱۱۲}{۲۲۴}=\frac{۵۶}{۱۱۲}=\frac{۲۸}{۵۶}=\dots=\frac{۱}{۲}$$

و قدرنسبت تصاعد (ج) مساوی است با:

$$\frac{-۱۸}{۹}=\frac{۳۶}{-۱۸}=\frac{-۷۲}{۳۶}=\ldots=-۲$$

و نیز واضح است که اگر جملهٔ اول و قدر نسبت یك تصاعد هندسی در دست باشد، می‌توان همهٔ جمله‌های آن‌را متوالیاً حساب‌کرد.

مثلا تصاعد هندسی که جملهٔ اولش ۱ و قدرنسبت آن $\frac{۲}{۳}$ باشد، عبارت است از:

$$۱\ ,\ \frac{۲}{۳}\ ,\ \frac{۴}{۹}\ ,\ \frac{۸}{۲۷}\ ,\ \ldots$$

تمرین

جملهٔ چهارم هر یك از تصاعدهای هندسی زیر را بنویسید :

۱ $۷\ ,\ ۲۱\ ,\ ۶۳\ ,\ \ldots$

۲ $۴\ ,\ -۱۲\ ,\ ۳۶\ ,\ \ldots$

۳ $۲۴\ ,\ -۳۶\ ,\ ۵۴\ ,\ \ldots$

۴ $۱۸\ ,\ ۳۰\ ,\ ۵۰\ ,\ \ldots$

۵ $۸۰\ ,\ -۱۴۰\ ,\ ۲۴۵\ ,\ \ldots$

۶ $۳ab\ ,\ -۶a^۲b\ ,\ ۱۲a^۳b$

۷ $(a^۲-b^۲)\ ,\ (a-b)\ ,\ \frac{a-b}{a+b}\ ,\ \ldots$

۸ $-۲x^۲y\ ,\ ۶y^۳\ ,\ -۱۸\frac{y^۵}{x^۲}\ ,\ \ldots$

۳ـ دستور محاسبهٔ جملهٔ nام تصاعد هندسی ـ جملهٔ اول تصاعد را $t_۱$ و قدرنسبت آن را q می‌نامیم . بنا به‌تعریف تصاعد هندسی داریم :

$$\text{جملهٔ اول}=t_۱$$

$$\text{جملهٔ دوم}=t_۱\times q=t_۱q$$

$$\text{جملهٔ سوم}=t_۱q\times q=t_۱q^۲$$

$$\text{جملهٔ چهارم}=t_۱q^۲\times q=t_۱q^۳$$

$$\text{جملهٔ پنجم}=t_۱q^۳\times q=t_۱q^۴$$

دیده می‌شود که نمای q در هر جمله یکی‌کمتر از عددی است که مرتبهٔ آن جمله را مشخص می‌کند (زیرا q برای نخستین بار برای تعیین جملهٔ دوم در $t_۱$ ضرب شده است).

پس اگر عمل فوق را ادامه دهیم،مثلا جملهٔ هشتم مساوی خواهد بود با $t_۱q^۷$ و جملهٔ

صدم مساوی خواهد بود با t_1q^{99} . بنابراین جملهٔ nام تصاعد هندسی از دستور زیر به‌دست می‌آید :

$$\boxed{t_n=t_1\times q^{n-1}}$$

۴ ـ حل چند مسئلهٔ نمونه

مسئلهٔ ۱ـ جملهٔ ششم تصاعد هندسی زیر را حساب کرده تعیین کنید که آیا جمله‌ای از آن هست که مساوی با $\frac{۴}{۲۴۳}$ باشد یا نه .

$$۱۰۸ , ۳۶ , ۱۲ , ۴ , \dots$$

حل ـ در این تصاعد $t_1=۱۰۸$ و $q=\frac{۳۶}{۱۰۸}=\frac{۱}{۳}$ ، پس :

$$t_۶=t_1q^{۶-۱}=۱۰۸\times\left(\frac{۱}{۳}\right)^۵=\frac{۴}{۹}$$

اگر جملهٔ nام این تصاعد مساوی با $\frac{۴}{۲۴۳}$ باشد، خواهیم داشت

$$t_1q^{n-1}=\frac{۴}{۲۴۳}$$

یعنی :

$$۱۰۸\times\left(\frac{۱}{۳}\right)^{n-1}=\frac{۴}{۲۴۳}$$

و از آنجا

$$\left(\frac{۱}{۳}\right)^{n-1}=\frac{۴}{۲۴۳\times۱۰۸}=\frac{۱}{۲۴۳\times۲۷}=\left(\frac{۱}{۳}\right)^۸$$

بنابراین $n-۱=۸$ و از آنجا $n=۹$.

پس جملهٔ نهم تصاعد مفروض مساوی با $\frac{۴}{۲۴۳}$ است.

مسئلهٔ ۲ـ اگر جملهٔ نهم یك تصاعد هندسی مساوی با ۶۴ برابر جملهٔ ششم آن باشد، تعیین‌کنید که جملهٔ دوازدهم آن چند برابر جملهٔ هشتم آن خواهد بود.

حل ـ جملهٔ اول را t_1 و قدر نسبت را q می‌نامیم. در این صورت :

$$t_۶=t_1q^۵ \quad \text{و} \quad t_۹=t_1q^۸$$

و نظر به‌فرض مسئله داریم : $t_1q^۸=۶۴\times t_1q^۵$

و چون $t_1\neq ۰$ ، پس : $q^۳=۶۴$ و از آنجا $q=\sqrt[۳]{۶۴}=۴$

اکنون می‌نویسیم : $t_{۱۲}=t_1q^{۱۱}$ و $t_۸=t_1q^۷$

پس :

$$\frac{t_{۱۲}}{t_۸}=\frac{t_1q^{۱۱}}{t_1q^۷}=q^۴=۴^۴=۲۵۶$$

بنابر این :

$$t_{۱۲}=۲۵۶t_۸$$

تمرین

جملهٔ ششم هریک از تصاعدهای هندسی زیر را بنویسید :

۱ $\quad ۲ , ۶ , ۱۸ , \ldots$

۲ $\quad ۷ , -۱۴ , ۲۸ , \ldots$

۳ $\quad ۵۴ , -۱۸ , ۶ , \ldots$

۴ $\quad \frac{۲}{۳} , ۳\frac{۱}{۳} , ۱۶\frac{۲}{۳} , \ldots$

۵ $\quad \frac{a}{۳} , \frac{۳}{a} , \frac{۲۷}{a^۳} , \ldots$

۶ـ دو جملهٔ اول یك تصاعد هندسی $t_1 = ۴۳۲$ و $t_2 = ۷/۲$ هستند . جملهٔ چهارم‌آن را حساب کنید .

۷ ـ جملهٔ هفتم یك تصاعد هندسی مساوی با هشت برابر جملهٔ چهارم آن است . نسبت جملهٔ دوازدهم آن را به‌جملهٔ هشتم آن حساب کنید.

۸ ـ نشان دهید که دو تصاعد هندسی می‌توان یافت که در هر یك از آنها جملهٔ هفتم مساوی با ۱۶ برابر جملهٔ پنجم باشد و مجموع سه جملهٔ اول مساوی با ۲۷۳ شود. سپس جملهٔ چهارم هر یك از این دو تصاعد را بنویسید.

۹ـ در یك تصاعد هندسی جملهٔ پنجم ۴۸ و جملهٔ هشتم ۳۸۴ است . جملهٔ سوم این تصاعد را بنویسید.

۱۰ ـ دریك تصاعد هندسی جملهٔ ششم ۵۳ وجملهٔ هشتم ۴۷۷ است؛ قدرنسبت این تصاعد را حساب کنید.

۵ـ واسطه‌های هندسی ـ در هر تصاعد هندسی جمله یا جمله‌هایی را که بین دو جملهٔ نامتوالی قرار دارند واسطه یا واسطه‌های هندسی بین آن دو جمله می‌نامند.

مثلا در تصاعد هندسی :

$$(۵) , ۱۰ , ۲۰ , ۴۰ , (۸۰)$$

اعداد ۱۰ و ۲۰ و ۴۰ سه واسطهٔ هندسی بین اعداد ۵ و ۸۰ هستند. در این صورت می‌گویند که اعداد ۱۰ و ۲۰ و ۴۰ سه واسطهٔ هندسی هستند که بین اعداد ۵ و ۸۰ درج شده‌اند.

هر گاه سه جملهٔ متوالی ازیك تصاعد هندسی را در نظرگیریم ، جملهٔ وسط را به‌طورمطلق

واسطهٔ هندسی بین دو جملهٔ دیگر می‌نامند.

مثلا در تصاعد هندسی : ۶۳ , ۲۱ , ۷

عدد ۲۱ واسطهٔ هندسی بین اعداد ۷ و ۶۳ است.

۶- درج واسطه‌های هندسی بین دو عدد - مقصود از درج m واسطهٔ هندسی بین دو عدد معلوم a و b این است که یک تصاعد هندسی متناهی تشکیل دهیم که $m+2$ جمله داشته باشد و a و b به‌ترتیب جمله‌های اول و آخر آن باشند.

معمولا از دو عددی که می‌خواهند بین آنها واسطه‌های هندسی درج کنند آن را که اول نام می‌برند جملهٔ اول تصاعد می‌گیرند.

مثال ۱- می‌خواهیم واسطهٔ هندسی بین اعداد a و b را بیابیم.

چون در اینجا به‌طور مطلق از واسطهٔ هندسی بین دو عدد گفتگو شده باید یک واسطهٔ هندسی بین a و b درج کنیم. پس تصاعد هندسی مطلوب سه جمله دارد، و اگر آن را به‌صورت b , x , a بنویسیم ، معلوم می‌شود که

$$\frac{x}{a}=\frac{b}{x}$$

و از آنجا : $x^2=ab$ و یا $x=\pm\sqrt{ab}$

پس : اگر ab مثبت باشد ، بین دو عدد a و b دو واسطهٔ هندسی وجود دارد که عبارتند از $\sqrt{ab}$ و $-\sqrt{ab}$.

به‌عبارت دیگر : واسطهٔ هندسی بین دو عدد a و b جذر حاصل ضرب آنهاست.

مثال ۲- می‌خواهیم بین اعداد ۵۱۲ و ۱۲۱/۵ چهار واسطهٔ هندسی درج کنیم.

در واقع باید تصاعدی هندسی تشکیل دهیم که شش جمله داشته باشد و جملهٔ اول آن یکی ازدو عدد مفروض و جملهٔ ششم آن عدد دیگر باشد.

اگر جملهٔ اول را ۵۱۲ بگیریم و قدر نسبت تصاعد مطلوب را q بنامیم خواهیم داشت :

$$t_6=t_1q^5=512q^5$$

چون جملهٔ ششم تصاعد باید ۱۲۱/۵ باشد، پس :

$$512q^5=121/5$$

و یا

$$q^5=\frac{121/5}{512}=\frac{243}{1024}$$

و از آنجا

$$q=\sqrt[5]{\frac{243}{1024}}=\frac{3}{4}$$

بنابراین چهار واسطهٔ هندسی مطلوب عبارتند از :

$$۵۱۲\times\frac{۳}{۴}\ ,\ ۵۱۲\times\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۲}\ ,\ ۵۱۲\times\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۳}\ ,\ ۵۱۲\times\left(\frac{۳}{۴}\right)^{۴}$$

یعنی : ۳۸۴ , ۲۸۸ , ۲۱۶ , ۱۶۲

سؤال ـ اگر در مثال فوق ۱۲۱/۵ را جملهٔ اول و ۵۱۲ را جملهٔ ششم تصاعد بگیریم، چه تغییری در جواب مسئله روی خواهد داد؟

تمرین

واسطهٔ هندسی بین هر زوج از اعداد زیر را معین کنید :

۱	۲ , ۱۸	۲	۵ , ۲۰
۳	۲۵۲ , ۷	۴	۱۲۱ , ۴
۵	۳ , ۱۴۷	۶	۵ , ۹/۸

به‌فرض آن‌که هر دسته از اعداد زیر تشکیل تصاعد هندسی متناهی بدهند x را بیابید :

۷. $۲\ ,\ x\ ,\ ۱۲\frac{۱}{۲}$

۸. $۸\ ,\ x\ ,\ ۶۰\frac{۱}{۲}$

۹. $۲۷\ ,\ x\ ,\ ۵۶\frac{۱}{۳}$

۱۰. $۳\frac{۱}{۸}\ ,\ x\ ,\ ۶۴\frac{۲}{۹}$

۱۱. $۶\frac{۱}{۸}\ ,\ x\ ,\ ۹\frac{۷}{۱۸}$

۷ - مجموع جمله‌های تصاعد هندسی متناهی ـ تصاعد هندسی متناهی را که دارای n جمله باشد در نظر می‌گیریم وجملهٔ اول آن را $t_۱$ و جملهٔ nام آن را t_n و قدر نسبت آن را q می‌نامیم. می‌خواهیم مجموع جمله‌های این تصاعد را حساب کنیم. این مجموع را S_n می‌نامیم.

چون جملهٔ اول را $t_۱$ نامیده‌ایم جملهٔ nام مساوی است با $t_۱\times q^{n-۱}$ (چرا ؟) پس :

$$(۱)\qquad S_n=t_۱+t_۱q+t_۱q^۲+\dots+t_۱q^{n-۲}+t_۱q^{n-۱}$$

اگر دو طرف این تساوی را در q ضرب کنیم، حاصل می‌شود :

$$(۲)\qquad qS_n=t_۱q+t_۱q^۲+t_۱q^۳+\dots+t_۱q^{n-۱}+t_۱q^n$$

و چون تساوی (۲) را عضو به‌عضو از تساوی (۱) کم کنیم ، نتیجه می‌شود :

$$S_n - qS_n = t_1 - t_1q^n$$

و یا

$$S_n(1-q) = t_1(1-q^n)$$

و چون در تصاعد هندسی قدر نسبت مخالف با ۱ فرض می‌شود :

$$\boxed{S_n = \frac{t_1(1-q^n)}{1-q}}$$

این دستور وقتی به‌کار می‌رود که جملهٔ اول یعنی t_1 و قدر نسبت یعنی q و عدهٔ جمله‌ها یعنی n در دست باشد.

چون می‌دانیم که $t_n = t_1q^{n-1}$ و یا $qt_n = t_1q^n$

پس می‌توان دستور فوق را به‌صورت زیر نوشت :

$$\boxed{S_n = \frac{t_1 - qt_n}{1-q}}$$

این دستور وقتی به‌کار می‌رود که جملهٔ اول یعنی t_1 و جملهٔ آخر تصاعد هندسی متناهی یعنی t_n و قدرنسبت تصاعد یعنی q در دست باشد.

۸ـ طرح مسائل مختلف دربارهٔ تصاعد هندسی - درهرتصاعد هندسی متناهی پنج مقدار مهم می‌توان در نظر گرفت که عبارتند از جملهٔ اول (t_1) و قدر نسبت (q) و جملهٔ آخر (t_n) و عدهٔ جمله‌ها (n) و مجموع جمله‌ها (S_n) . در بین این پنج مقدار دو رابطهٔ زیر را ثابت کردیم :

$$\begin{cases} t_n = t_1q^{n-1} \\ S_n = \dfrac{t_1(1-q^n)}{1-q} \end{cases}$$

بنابراین هرگاه سه مقدار قابل قبول از مقادیر فوق در دست باشد ، عموماً می‌توان با استفاده از دستورهای فوق دو مقدار دیگر را از روی‌آنها حساب‌کرد (n باید همیشه عدد صحیح و مثبت باشد).

تمرین

در یك تصاعد هندسی :

۱ $t_1 = 3$ و $q = 4$ و $n = 5$ مطلوب است : t_n و S_n

S_n و t_1	»	$n=5$	و $q=-2$ و $t_n=32$	۲
S_n و q	»	$n=9$	و $t_1=12$ و $t_n=\frac{3}{64}$	۳
t_n و t_1	»	$S_n=2730$	و $q=\frac{1}{4}$ و $n=6$	۴
S_n و n	»	$q=\frac{2}{3}$	و $t_1=3$ و $t_n=\frac{32}{81}$	۵

۹ـ مجموع جمله‌های تصاعد هندسی نزولی نامتناهی.

الف ـ **مثال** ـ تصاعد هندسی نامتناهی زیر را در نظر می‌گیریم :

$$1 , \frac{1}{2} , \frac{1}{4} , \frac{1}{8} , \ldots$$

در این تصاعد $t_1=1$ و $q=\frac{1}{2}$ ، پس مطابق با آنچه در شمارهٔ ۸ گفتیم مجموع n جمله از این تصاعد عبارت است از :

$$S_n=\frac{t_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{1\times[1-(\frac{1}{2})^n]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{\frac{1}{2}}$$

$$=2[1-(\frac{1}{2})^n]=2-(\frac{1}{2})^{n-1}$$

از روی تساوی $S_n=2-(\frac{1}{2})^{n-1}$ دیده می‌شود که :

n هر چه باشد مجموع جمله‌های تصاعد مفروض همیشه کوچکتر از ۲ است.

اکنون به‌ازای چند مقدار n مقدار S_n را حساب می‌کنیم :

$$S_5=2-(\frac{1}{2})^4=2-0/0625=1/9375$$

$$S_{10}=2-(\frac{1}{2})^9=2-0/001953=1/998047$$

$$S_{15}=2-(\frac{1}{2})^{14}=2-0/000061=1/999939$$

$$S_{20}=2-(\frac{1}{2})^{19}=2-0/000002=1/999998$$

از مشاهده و دقت در مقادیر فوق معلوم می‌شود که هر چه عدهٔ جمله‌ها یعنی n بزرگتر باشد مجموع S_n به عدد ۲ نزدیکتر است. به‌عبارت دیگر : هر چه n بزرگتر شود $(\frac{1}{2})^{n-1}$ کوچکتر می‌شود و مقدار S_n یعنی $2-(\frac{1}{2})^{n-1}$ به عدد ۲ نزدیکتر می‌گردد.

یک اصطلاح و فرمول جدید

وقتی عدهٔ جمله‌ها را خیلی‌خیلی زیاد (هر قدر زیاد بخواهیم) اختیار کنیم، S ، یعنی مجموع جملات از عدد ۲ کوچکتر باقی می‌ماند در اینجا اصطلاحاً گفته می‌شود :

حـد مجموع جملات وقتی عدهٔ جملات خیلی خیلی زیاد (بی‌نهـایت زیاد) شود برابر ۲ می‌گردد .

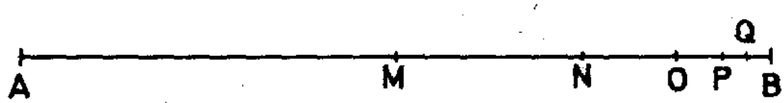
در تمام تصاعدهای هندسی که درآنها داشته باشیم :

$$0<q<1 \text{ یا } -1<q<0$$

ثابت می‌شود که مجموع جملات وقتی عدهٔ جملات یعنی n بی‌نهایت زیاد شود از دستور زیر به دست می‌آید :

$$S=\frac{t_1}{1-q}$$

ب ـ **تعبیر هندسی مطلب فوق** ـ فرض کنیم طول پاره خط AB (شکل ۷۹) مساوی با ۲ واحد باشد: $AB=2$.



(شکل ۷۹)

وسط پاره خط AB را نقطهٔ M و وسط پاره خط MB را نقطهٔ N و وسط NB را O و وسط OB را P و وسط PB را Q می‌نامیم. در این صورت داریم :

$$PQ=\frac{1}{16} \;,\; OP=\frac{1}{8} \;,\; NO=\frac{1}{4} \;,\; MN=\frac{1}{2} \;,\; AM=1$$

و غیره .

بنابراین مجموع : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$

به وسیلهٔ : $AM+MN+NO+OP+PQ$

نشان داده می‌شود.

اگر درعمل فوق تقسیمات را ادامه دهیم، مجموع پاره خطهای فوق را هرقدربخواهیم می‌توانیم به AB نزدیک کنیم ولی هرگز این مجموع درست مساوی با AB نمی‌شود.

به‌عبارت دیگر مجموع : $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\dots$
را هرقدر بخواهیم می‌توانیم به‌عدد ۲ نزدیک‌کنیم ولی هرقدر هم عدهٔ جمله‌ها را زیاد انتخاب کنیم هرگز این مجموع به ۲ نمی‌رسد.

مثال ـ می‌خواهیم حد مجموع جمله‌های تصاعد هندسی :

$$5\ ,\ -\frac{5}{3}\ ,\ \frac{5}{9}\ ,\ -\frac{5}{27}\ ,\ \dots$$

را وقتی که عدهٔ جمله‌ها بی‌نهایت بزرگ شود حساب کنیم.

قدر نسبت این تصاعد $\left(-\frac{1}{3}\right)$ و قدر مطلق این قدرنسبت کوچکتر از ۱ است ، پس :

$$S=\frac{5}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{5}{1+\frac{1}{3}}=\frac{15}{4}$$

۱۰ ـ محاسبهٔ کسر متعارفی مولد یك بسط دهگانی

در کتاب **ریاضیات سوم راهنمائی** قضیهٔ زیر را بیان کردیم :

«هر بسط دهگانی متناوب را می‌توان بسط دهگانی یك عدد گویا دانست .»

اکنون می‌خواهیم با استفاده از حد مجموع جمله‌های تصاعد هندسی کسر متعارفی مولد یك بسط دهگانی را حساب‌کنیم.

مثال ـ می‌خواهیم کسری متعارفی بیابیم که اگر صورت آن را بر مخرجش تقسیم‌کنیم، بسط دهگانی متناوب $3/\overline{24}$ حاصل شود.

بسط دهگانی مفروض را می‌توان چنین نوشت :

$$A=3+\left[\frac{24}{100}+\frac{24}{(100)^2}+\frac{24}{(100)^3}+\dots\right]$$

مقدار داخل کروشه مجموع جمله‌های یك تصاعد هندسی نامتناهی است که قدر نسبت آن $\frac{1}{100}$ و جملهٔ اول آن $\frac{24}{100}$ است . چون قدر نسبت این تصاعد کوچکتر از یك است، پس حد مجموع جمله‌های آن عبارت است از :

$$\frac{\frac{24}{100}}{1-\frac{1}{100}} \quad \text{یعنی} \quad \frac{24}{99} \quad \text{و یا} \quad \frac{8}{33}$$

پس کسر متعارفی مطلوب مساوی است با :

$$A = ۳ + \frac{۸}{۳۳} = \frac{۱۰۷}{۳۳}$$

می‌دانیم که کسر متعارفی $\frac{۱۰۷}{۳۳}$ را مولد بسط دهگانی $۳/\overline{۲۴}$ می‌نامند .

تمرین

مجموع جمله‌های کدام یك از تصاعدهای هندسی زیر حد دارد؟ در صورتی که این حد موجود باشد ، آن را حساب کنید.

۱ $\quad$ ۹ , ۶ , ۴ , ...

۲ $\quad$ ۹ , −۱۲ , ۱۶ , ...

۳ $\quad$ ۴۸ , −۳۶ , ۲۷ , ...

۴ $\quad$ ۶ , ۵/۴ , ۴/۸۶ , ...

۵ $\quad$ ۹ , −۳ , ۱ , ...

۶ $\quad$ $۵ \, , \, ۳\frac{۱}{۲} \, , \, ۲\frac{۹}{۲۰} \, , \, ...$

۷ $\quad$ $۶ \, , \, ۴\frac{۱}{۲} \, , \, ۳\frac{۳}{۸} \, , \, ...$

۸ $\quad$ $۱۲\frac{۱}{۴} \, , \, ۸\frac{۳}{۴} \, , \, ۶\frac{۱}{۴} \, , \, ...$

۹ $\quad$ $۱۶\frac{۱}{۵} \, , \, -۱۲\frac{۳}{۵} \, , \, ۹\frac{۴}{۵}$

۱۰ $\quad$ ۰/۴ , ۰/۰۶ , ۰/۰۰۹ , ...

۱۱ـ نشان دهید که مجموع جمله‌های هریك از دو تصاعد هندسی زیر به سمت یك حد مشترك میل می‌کنند :

$$۶ \, , \, ۱\frac{۱}{۲} \, , \, \frac{۳}{۸} \, , \, ...$$

$$7, \frac{7}{8}, \frac{7}{64}, \ldots$$

۱۲ـ تصاعدی هندسی معین کنید که جملهٔ اول آن ۱۸ و حد مجموع جمله‌های آن ۵۴ باشد.

۱۳ـ تصاعدی هندسی تعیین کنید که جملهٔ دوم آن ۵ و حد مجموع جمله‌های آن ۲۰ باشد.

کسر متعارفی مولد هر یك از بسطهای دهگانی زیر را حساب کنید:

۱۴	$0/\overline{3}$	**۱۵**	$0/1\overline{6}$
۱۶	$0/\overline{23}$	**۱۷**	$0/3\overline{78}$
۱۸	$1/\overline{537}$	**۱۹**	$12/\overline{37}$
۲۰	$2/\overline{288}$	**۲۱**	$4/\overline{1881}$

مسائل مختلف در بارهٔ بخش دوم

تصاعد حسابی

۱ـ مجموع همهٔ عددهایی را که در جدول ضرب اعداد از ۱ تا ۱۰ وجود دارد حساب کنید.

۲ـ یك ساعت دیواری طوری ساخته شده که علاوه بر آن‌که در سر هر ساعت به‌تعداد همان ساعت زنگ می‌زند (مثلا در سر ساعت ۳ سه بار و در سر ساعت ۴ چهار بار) در رأس هر نیمساعت نیز یك بار زنگ می‌زند (مثلا در ساعتهای نیم، یك و نیم، دو و نیم). تعیین کنید که این ساعت در یك شبانه روز چند بار زنگ خواهد زد.

۳ـ مجموع عددهای فرد بزرگتر از ۱۰۰ و کوچکتر از ۱۰۰۰ را حساب کنید.

۴ـ مجموع مضربهای عدد ۳ راکه بزرگتر از ۲ و کوچکتر از ۱۵۱ هستند حساب کنید.

۵ـ مجموع مضربهای عدد ۱۱ از ۱۱۰ تا ۱۱۰۰ (و خود ۱۱۰) را حساب کنید.

۶ـ سه عدد بیابید که تشکیل یك تصاعد متناهی حسابی دهند و مجموع آنها ۲۱ و مجموع مربعاتشان ۱۶۵ باشد .

۷ـ سه عدد بیابید که تشکیل تصاعد حسابی متناهی دهند و مجموعشان ۳۹ و حاصل ضربشان ۲۰۸۰ باشد.

۸ـ یك تصاعد حسابی متناهی پنج جمله دارد و مجموع جمله‌های آن ۷۵ و مجموع مربعات جمله‌های آن ۱۱۶۵ است ؛ این تصاعد را مشخص کنید.

تصاعد هندسی

۹ـ با استفاده از دستور مجموع n جمله از تصاعد هندسی می‌توان درستی بعضی از اتحادها را ثابت کرد.

مثال ـ اگر عدهٔ جمله‌های تصاعد هندسی دو و جملهٔ اول آن a باشد ، داریم :

$$a+aq=a(1+q)=a\frac{(q^2-1)}{q-1}$$

و از آنجا اتحاد : $q^2-1=(q+1)(q-1)$

با همین روش درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.

$$q^3-1=(q-1)(q^2+q+1)$$
$$q^n-1=(q-1)(q^{n-1}+q^{n-2}+q^{n-3}+\dots+q^2+q+1)$$

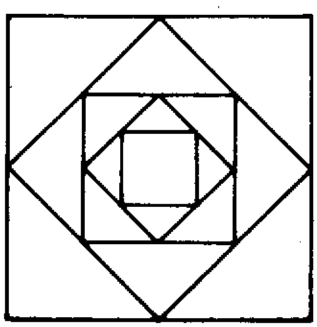
۱۰ـ سه جملهٔ متوالی از یك تصاعد هندسی بیابیدکه مجموعشان ۳۱ و حاصل‌ضربشان ۱۲۵ باشد .

(راهنمایی ـ جملهٔ وسط را x و قدر نسبت را q بگیرید)

۱۱ـ اوساط اضلاع یك مربع به ضلع a را به هم وصل می‌کنیم تا مربع جدیدی تشکیل شود. سپس اوساط اضلاع مربع جدید را به‌هم وصل می‌کنیم تا مربع‌دیگری حاصل شود و عمل را ادامه می‌دهیم (شکل ۸۰) .

اولا حد مجموع مساحتهای این مربعها را حساب کنید .

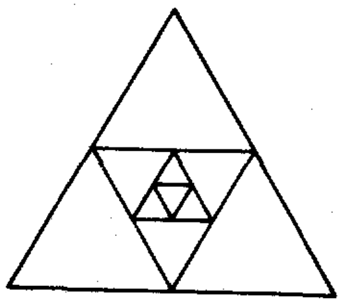
ثانیاً حد مجموع محیطهای این مربعها را بیابید.



(شکل ۸۰)

۱۲ـ اوساط اضلاع یك مثلث

متساوی الاضلاع را به‌هم وصل می‌کنیم تا مثلث متساوی‌الاضلاع جدیدی تشکیل شود. سپس اوساط اضلاع مثلث جدید را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث دیگری پدید آید و این عمل را ادامه می‌دهیم (شکل ۸۱).

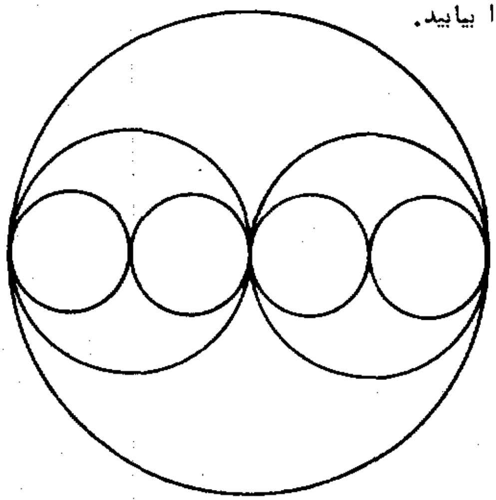


(شکل ۸۱)

اولا حد مجموع محیطهای این مثلثها را حساب کنید.

ثانیاً حد مجموع مساحتهای این مثلثها را بیابید.

۱۳- در دایره‌ای به‌شعاع R دو دایرهٔ متساوی به شعاع $\frac{R}{۲}$ رسم می‌کنیم که با دایرهٔ مفروض مماس داخل و با یکدیگر مماس خارج باشند. سپس درهریك از دایره‌های مرسوم همین عمل را انجام می‌دهیم و آن را تکرار می‌کنیم (شکل ۸۲).



(شکل ۸۲)

اولا ثابت کنید که مجموع محیطهای همهٔ دایره‌هایی که در این شکل دارای شعاع مشترك هستند مقداری است ثابت.

ثانیاً حد مجموع مساحتهای همهٔ دایره‌ها را حساب کنید.

۱۴- مجموع مربعات جمله‌های یك تصاعد هندسی متناهی را حساب کنید.

۱۵- اگر a ، b ، c و d جمله‌های متوالی یك تصاعد هندسی باشند ، درستی رابطهٔ زیر را ثابت کنید :

$$(b-c)^۲ = ac + bd - ۲ad$$

بخش سوم

لگاریتم

تاریخچهٔ اختراع لگاریتم - کلمهٔ لگاریتم از دو کلمهٔ یونانی logos که یکی از معانی آن «نسبت» است و arithmos که به معنی «عدد» است تشکیل یافته .

هدف اصلی از اختراع لگاریتم ایجاد سهولت در محاسبات عددی بوده است. دراین بخش ازکتاب حاضر خواهیم دیدکه تا چه اندازه به‌کار بردن لگاریتم موجب‌آسانی محاسبه می‌شود. گفته‌اند که اختراع لگاریتم با کوتاه کردن زمان محاسبه عمر محاسبان را دو برابر کرده است .

نپر (Neper یا Napier)ریاضی‌دان اسکاتلندی‌که از ۱۵۵۰ تا ۱۶۱۷ میلادی می‌زیست در سال ۱۶۱۴ کتاب‌کوچکی به‌زبان لاتینی منتشر ساخت که عنوان آن «شرح جدول شگفت‌انگیز لگاریتمها» بود و به وسیلهٔ آن کتاب اختراع لگاریتم را به‌معاصران خود اعلام داشت. نپر برای تکمیل اختراع خود و نوشتن آن کتاب در حدود بیست سال کوشش مداوم به عمل آورد. انتشار کتاب مذکور توجه دانشمندان معاصر نپر را به اهمیت اختراع وی جلب کرد و یك سال پس‌از انتشار آن کتاب بریگز (Henry Briggs) که درآن زمان در انگلستان معلم ریاضیات بود کار خود را رها کرد و به اسکاتلند نزد نپر رفت تا این اختراع مهم را به وی تبریك بگوید .

چون لگاریتمی‌که نپر اختراع کرده بود در مبنای دهگانی نبود (تعریف مبنا را در فصل بعد خواهید دید) ، بریگز به وی پیشنهاد کرد که جدولهای لگاریتمی بر اساس شمار دهگانی تهیه شود و نپر این پیشنهاد را پذیرفت ولی عمرش برای انجام دادن این‌کار وفا نکرد. بعداً بریگز با همهٔ نیروی خود مشغول تهیهٔ جدول لگاریتم دهگانی شد و در سال ۱۶۲۴ نخستین جدول لگاریتمی دهگانی را منتشر ساخت و بعداً دیگران کار او را تکمیل کردند.

امروزه مفهوم لگاریتم را به‌آسانی از روی قوانین مربوط به‌توانهای اعدادبیان می‌کنیم ولی این از عجایب تاریخ ریاضیات است که نپر پیش از آن که توانهای اعداد مورد استعمال قرار گیرد لگاریتم را اختراع کرد.

فصل ۱
لگاریتم و خواص آن

۱ـ تعریف لگاریتمـ به‌جای‌آن‌که بگوییم $100=10^2$ ، می‌گوییم « لگاریتم عدد ۱۰۰ در پایهٔ (یا در مبنای) ۱۰ مساوی است با ۲» و می‌نویسیم :

$$\log_{10}100=2$$

همچنین به‌جای آن که بگوییم $81=3^4$ ، می‌گوییم «لگاریتم ۸۱ در پایهٔ ۳ مساوی است با ۴» و می‌نویسیم :

$$\log_3 81=4$$

به‌طور کلی :

اگر b عددی حقیقی ومثبت و مخالف با یك باشد و داشته باشیم : $b^y=x$ ، نمای y را لگاریتم x درپایهٔ b می‌نامند و می‌نویسند : $y=\log_b x$.

$$b\in R^+ \ , \ b\neq 1 : b^y=x \Longleftrightarrow y=\log_b x$$

به‌عبارت دیگر : لگاریتم x در پایهٔ b عبارت است از عددی که باید b را به‌توان آن رسانید تا x حاصل شود.

دو تساوی $b^y=x$ و $\log_b x=y$ هم‌ارز یکدیگرند و یك معنی دارند . تفاوت آنها در این است که اولی به صورت توان و دومی به صورت لگاریتم نوشته شده است.

چند مثال

$$\log_5 125=3 \Longleftrightarrow 5^3=125$$

$$\log_{10} 0/001=-3 \Longleftrightarrow 10^{-3}=\frac{1}{1000}=0/001$$

$$\log_{64}\frac{1}{8}=-\frac{1}{2} \Longleftrightarrow (64)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{(64)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{8}$$

مطابق با تعریف فوق هر عدد b را که مثبت و مخالف با یك باشد می‌توان پایهٔ (یا مبنای) لگاریتم گرفت . بنابراین دستگاههای لگاریتم مختلف می‌توان به‌وجود آورد .

سؤال ـ چرا پایهٔ b را نمی‌توان مساوی با عدد یك اختیار کرد ؟

تبصره ـ اولا می‌دانیم که اگر a عددی حقیقی و مخالف با صفر باشد ، $a^0=1$.

بنابراین :
$$\log_a 1=0$$

یعنی : لگاریتم عدد ۱ در هر پایه‌ای مساوی با صفر است.

ثانیاً می‌دانیم که $a^1=a$ بنابراین : $\log_a a=1$

یعنی : لگاریتم پایه همیشه مساوی با ۱ است.

توجه کنید ـ همیشه باید به‌خاطر داشت که «لگاریتم» عبارت است از نمای یک توان که پایهٔ آن b باشد.

تمرین

هر یک از تساویهای زیر را به‌صورت لگاریتم بنویسید :

۱ $7^2=49$ ۲ $4^3=64$

۳ $10^4=10000$ ۴ $16^{\frac{1}{2}}=4$

۵ $8^{\frac{1}{3}}=2$ ۶ $8^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$

۷ $5^{-2}=\frac{1}{25}$ ۸ $2^{-3}=\frac{1}{8}$

۹ $5^0=1$ ۱۰ $10^{-2}=\frac{1}{100}$

هر یک از تساویهای زیر را به‌صورت توان بنویسید :

۱۱ $\log_2 16=4$ ۱۲ $\log_{10}10000=4$

۱۳ $\log_{10}0/01=-2$ ۱۴ $\log_{10}10=1$

۱۵ $\log_{10}1=0$ ۱۶ $\log_2 32=5$

۱۷ $\log_5 125=3$ ۱۸ $\log_8 4=\frac{2}{3}$

۱۹ $\log_{10}0/1=-1$ ۲۰ $\log_4 8=\frac{3}{2}$

هر یک از مقادیر زیر را حساب کنید :

۲۱ $\log_2 64$ ۲۲ $\log_{10}0/001$

۲۳ $\log_{27}9$ ۲۴ $\log_5 1$

۲۵ $\log_5 5$ ۲۶ $\log_b b$

۲۷ $\log_b 1$ ۲۸ $\log_b(b^4)$

۲۹ $log_{۲۵}۱۲۵$ ۳۰ $log_{۹}۲۷$

۳۱ $log_{۱۰}(۱۰۰۰^{۲})$ ۳۲ $log_{۱۰}(۱۰^{۳})$

۳۳ $log_{۱۰}(۱۰^{۵})$ ۳۴ $log_{b}(b^{۵})$

۳۵ $log_{۸}۱۶$ ۳۶ $log_{۱۶}۸$

۳۷ $log_{۸}\frac{۱}{۲}$ ۳۸ $log_{۱۶}\frac{۱}{۴}$

۳۹ $log_{۲۷}\frac{۱}{۳}$ ۴۰ $log_{۹}\frac{۱}{۳}$

در هر یك از تساویهای زیر یك حرف جانشین عدد مجهولی است. آن عدد را بیابید :

۴۱ $log_{b}۱۶=۲$ ۴۲ $log_{۶}x=-۲$

۴۳ $log_{۴}x=-۳$ ۴۴ $log_{a}۶۴=۳$

۴۵ $log_{۱۶}N=\frac{۱}{۴}$ ۴۶ $log_{۱۶}M=-\frac{۱}{۴}$

۴۷ $x=log_{۹}۸۱$ ۴۸ $log_{x}\frac{۱}{۱۶}=-۲$

۴۹ $log_{x}۳۲=\frac{۵}{۲}$ ۵۰ $log_{۱۶}N=\frac{۳}{۲}$

۲ـ لگاریتم دهگانی ـ دیدیم که هر عدد حقیقی مثبت به‌استثنای یك را می‌توان پایهٔ لگاریتم اختیار کرد . مثلا در ریاضیات عالی پایهٔ لگاریتم را عددی گنگ موسوم به e می‌گیرند که اندازهٔ تقریبی آن ۲/۷۱۸۲۸ است . این نوع لگاریتم را «لگاریتم طبیعی» یا «لگاریتم نپری» می‌نامند .

اما چون درعمل همهٔ اعداد را در پایهٔ ۱۰ می‌نویسیم (شمار دهگانی) ، برای محاسبات عددی پایهٔ لگاریتم را عدد ۱۰ می‌گیرند و این نوع لگاریتم را «لگاریتم دهگانی» می‌نامند . مطابق با تعریف کلی لگاریتم می‌توان گفت :

لگاریتم دهگانی هر عددحقیقی مثبت a عددی حقیقی است مانند x که اگر ۱۰ را به‌توان آن برسانیم عدد a حاصل شود.

$$۱۰^{x}=a \iff x=log_{۱۰}a$$

چون دراین کتاب فقط لگاریتم دهگانی را به‌کار خواهیم برد دیگر نوشتن پایه که همیشه عدد ۱۰ است لزومی ندارد و وقتی می‌نویسیم $log\,a$ مقصود لگاریتم دهگانی a است.

۳ـ تناظر یك به یك بین اعداد و لگاریتمهای آنها ـ به‌جدول زیر توجه کنید:

سطر اول	...	$۱۰^{۳}$	$۱۰^{۲}$	۱۰	**۱**	$۱۰^{-۱}$	$۱۰^{-۲}$	$۱۰^{-۳}$	...
سطر دوم	...	۳	۲	۱	**۰**	−۱	−۲	−۳	...

(جدول ۱)

این جدول دو سطر دارد :

سطر اول آن یك تصاعد هندسی نامتناهی است که یکی از جمله‌های آن عدد ۱ (یك) و قدر نسبت آن عدد ۱۰ است .

سطر دوم یك تصاعد حسابی نامتناهی است که یکی ازجمله‌های آن ۰ (صفر) و قدرنسبت آن یك است.

هر یك ازجمله‌های تصاعد هندسی نظیر یکی از جمله‌های تصاعد حسابی است و برعکس. جملهٔ ۱ (یك) از تصاعد هندسی و جملهٔ ۰ (صفر) از تصاعد حسابی نظیر یکدیگرند .
مطابق با تعریف لگاریتم هر یك از جمله‌های تصاعد حسابی ، لگاریتم دهگانی جملهٔ نظیرش از تصاعد هندسی است.

بنابراین : لگاریتم دهگانی هر توان صحیح نسبی از ۱۰ عدد صحیحی است نسبی.

$$a \in R+ \ , \ p \in Z : \ \log a = p \iff a = ۱۰^{p}$$

چند مثال

$$۱۰ = ۱۰^{۱} \iff \log ۱۰ = ۱$$

$$۱۰۰۰ = ۱۰^{۳} \iff \log ۱۰۰۰ = ۳$$

$$۱۰۰۰۰ = ۱۰^{۴} \iff \log ۱۰۰۰۰ = ۴$$

$$۰/۰۱ = ۱۰^{-۲} \iff \log ۰/۰۱ = -۲$$

$$۰/۰۰۰۱ = ۱۰^{-۴} \iff \log ۰/۰۰۰۱ = -۴$$

اکنون فرض کنیم که بین هر دوجملهٔ متوالی ازتصاعد هندسی جدول ۱ تعداد n واسطهٔ هندسی درج کرده باشیم . به‌این ترتیب یك تصاعد هندسی نامتناهی جدید به وجود می‌آید . همچنین فرض کنیم که بین هر دو جملهٔ متوالی از تصاعد حسابی همان جدول به همان تعداد n واسطهٔ حسابی درج کرده باشیم. به این ترتیب یك تصاعد حسابی نامتناهی جدید به‌وجود می‌آید .

مثلا اگر بین جمله‌های $۱۰^{۲}$ و $۱۰^{۳}$ از تصاعد هندسی سه واسطهٔ هندسی و بین جمله‌های نظیر آنها از تصاعد حسابی یعنی بین ۲ و ۳ سه واسطهٔ حسابی درج کنیم، با توجه به‌شماره‌های ۱۰ از فصل ۱ و ۷ از فصل ۲ بخش سوم ، حاصل می‌شود :

$$\begin{array}{ccccccccc} ۱۰^{۲} & , & ۱۰^{۲+\frac{۱}{۴}} & , & ۱۰^{۲+\frac{۲}{۴}} & , & ۱۰^{۲+\frac{۳}{۴}} & , & ۱۰^{۳} \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ ۲ & , & (۲+\frac{۱}{۴}) & , & (۲+\frac{۲}{۴}) & , & (۲+\frac{۳}{۴}) & , & ۳ \end{array}$$

و باز جمله‌های هر دو تصاعد هندسی و حسابی جدید نظیر یکدیگرند و هر جمله از تصاعد حسابی لگاریتم جملهٔ نظیر خود از تصاعد هندسی است.

بنابراین : لگاریتم هر توان گویایی از ۱۰ عددی است گویا .

$$a = ۱۰^{\frac{m}{n}} \Longleftrightarrow \log a = \frac{m}{n}$$

اکنون این سؤال پیش می‌آیدکه لگاریتم اعدادی‌که توان‌گویایی از ۱۰ نیستند چیست؟

در مرحلهٔ پیشرفته‌تری از ریاضیات ثابت می‌کنند که هر عدد حقیقی مثبت (متعلق به مجموعهٔ R^+) لگاریتمی دارد و بر عکس هر عدد حقیقی (متعلق به مجموعهٔ R) را می‌توان لگاریتم یك عددحقیقی مثبت دانست و به‌این ترتیب بین مجموعهٔ عددهای حقیقی مثبت (R^+) ولگاریتمهای‌آنها (که متعلق به مجموعهٔ R هستند) تناظر یك به یك برقرار است.

در این کتاب ما به ذکر مطالب زیرکه درستی آنها را دست‌کم در بارهٔ اعداد مندرج در جدول ۱ می‌توان مشاهده کرد اکتفا می‌کنیم :

(الف) ـ عدد صفر و عددهای منفی لگاریتم ندارند .
(ب) ـ لگاریتم عدد یك صفر است .
(ج) ـ لگاریتم عددهایی که از یك بزرگترند مثبت است .
(د) ـ لگاریتم عددهای مثبتی که از یك کوچکترند منفی است .
(ه) ـ فقط لگاریتم توانهای صحیح عدد ۱۰ عددهای صحیح هستند .
(و) ـ $A = B \Longleftrightarrow \log A = \log B$
(ز) ـ $\log a > \log a' \Longleftrightarrow a > a'$

خواص لگاریتم

۴ـ آسانی محاسبه با به‌کار بردن لگاریتم نتیجهٔ قضایای زیر است . زیرا خواهیم دیدکه به‌وسیلهٔ این قضایا هر عمل به عمل آسانتری تبدیل می‌گردد: عمل ضرب به عمل جمع وعمل تقسیم به عمل تفریق و عمل به‌توان رساندن به عمل ضرب و عمل ریشه‌گرفتن به عمل تقسیم مبدل می‌شود .

مثلا اگر بخواهیم $\sqrt[5]{0/006234}$ را حساب کنیم، قاعدهٔ ساده‌ای برای این کار نداریم؛ اما به‌وسیلهٔ لگاریتم با کمال سهولت مقدار آن را که ۰/۳۶۲۲ است به دست می‌آوریم .

(قضایای زیر را در مورد لگاریتم دهگانی ثابت می‌کنیم ولی هر استدلال کلی است و می‌توان آن را در بارهٔ لگاریتمهایی که در پایه‌های دیگر هستند تکرار کرد .)

۵- قضیهٔ ۱- لگاریتم حاصل‌ضرب چند عدد مساوی است با مجموع لگاریتمهای آن اعداد .

برهان - اگر داشته باشیم: $A=10^x$ و $B=10^y$، نتیجه می‌شود که $A\times B=10^{x+y}$؛ و نظر به‌تعریف لگاریتم داریم: $x=\log A$ و $y=\log B$ و $x+y=\log(A\times B)$؛ بنابراین :

$$\log(A\times B)=\log A+\log B$$

این قاعده کلی است و با همین استدلال معلوم می‌شود که :

$$\boxed{\log(A\times B\times C\times \ldots)=\log A+\log B+\log C+\ldots} \qquad (1)$$

۶- قضیهٔ ۲- لگاریتم نسبت دو عدد مساوی است با لگاریتم صورت منهای لگاریتم مخرج .

برهان - اگر داشته باشیم $Q=\frac{A}{B}$ ، می‌توان نوشت: $A=B\times Q$ ؛ ونظر به‌قضیهٔ ۱ داریم :

$$\log A=\log B+\log Q$$

بنابراین :

$$\boxed{\log Q=\log A-\log B} \qquad (2)$$

۷- قضیهٔ ۳- لگاریتم توان nام هر عدد مساوی است با لگاریتم آن عدد ضرب در n .

برهان - اگر داشته باشیم: $A=10^x$ یعنی $x=\log A$ ، می‌توان نوشت: $A^n=10^{nx}$ یعنی $\log A^n=nx$ ؛ بنابراین

$$\boxed{\log A^n=n\times \log A} \qquad (3)$$

۸- قضیهٔ ۴- لگاریتم ریشهٔ nام هر عدد مساوی است با لگاریتم آن عدد تقسیم بر n .

برهان - اگر داشته باشیم: $a=\sqrt[n]{A}$ ، می‌دانیم که $a^n=A$ ؛ پس : $\log a^n=\log A$ ، و یا نظر به قضیهٔ قبل $n\log a=\log A$ بنابراین :

$$\boxed{\log\sqrt[n]{A}=\frac{1}{n}\log A} \qquad (4)$$

۹- تبصره - در واقع قضایای ۲ و ۳ و ۴ نتیجهٔ قضیهٔ اصلی (۱) هستند.

تمرین

با توجه به مثالها هر یك از لگاریتمهای زیـر را به صورت حاصل جمع جبری چند لگاریتم یا حاصل ضرب یك عدد در یك لگاریتم بنویسید :

مثال

$$\log(3\times 5)=\log 3+\log 5$$

$$\log\frac{17}{29}=\log 17-\log 29$$

$$\log 12^5=5\log 12$$

$$\log\sqrt[3]{11}=\frac{1}{3}\log 11$$

۱ $\log\frac{ab}{c}$ ۲ $\log\frac{abc}{de}$

۳ $\log\frac{a^2}{b^2}$ ۴ $\log\frac{a^2b^3}{c^4}$

۵ $\log\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{2}{3}}}$ ۶ $\log\frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{y^3}}$

۷ $\log\sqrt[3]{a^2b^{-2}}$ ۸ $\log\sqrt[4]{a^3b^{-\frac{3}{4}}c^{\frac{1}{4}}}$

در صورتی‌که می‌دانیم : $\log 2=0/3010$ و $\log 3=0/4771$ و $\log 7=0/8451$، مقادیر زیر را حساب کنید (بعضی از جوابها ممکن است منفی باشد . آنها را به همان صورت معمولی بنویسید . مثلا $\log\frac{1}{2}=-0/3010$)

۹ $\log 14$ ۱۰ $\log 49$

۱۱ $\log\frac{7}{2}$ ۱۲ $\log 21$

۱۳ $\log 12$ ۱۴ $\log 30$

۱۵ $\log 0/2$ ۱۶ $\log 28$

۱۷ $\log\sqrt{2}$ ۱۸ $\log\sqrt[3]{3}$

۱۹ $\log\frac{\sqrt[3]{6}}{2}$ ۲۰ $\log\frac{7}{\sqrt{6}}$

۲۱ $\log\sqrt[۳]{۴۲}$ ۲۲ $\log\sqrt{\frac{۷}{۲}}$

۲۳ $\log ۵$ ۲۴ $\log\left(\frac{۲۱}{۳\sqrt{۲}}\right)$

۲۵ $\log\left(\frac{\frac{۴۹}{۳}}{۳\sqrt{۲}}\right)$ ۲۶ $\log\frac{۱۲\sqrt[۳]{۷}}{\sqrt{\frac{۱۴}{۳}}}$

۲۷ $\log\frac{۱۰۸}{۷\sqrt[۳]{۷}}$ ۲۸ $\log\frac{\sqrt[۳]{\frac{۲۴}{۷}}}{۹۸}$

۱۰ـ مُفَسّر و مانتیس ـ گفتیم که لگاریتم اعدادی که به صورت ۱۰^m هستند (m عددی است صحیح مثبت یا منفی) عدد صحیح m است. اما لگاریتم سایر اعداد عدد صحیح نیست بلکه عددی است که یك قسمت صحیح و یك جزء اعشاری دارد .

و نیز گفتیم که لگاریتم اعداد بزرگتر از یك مثبت است و لگاریتم اعدادی که مثبت ولی کوچکتر از یك هستند منفی است.

برای سهولت محاسبه همیشه لگاریتمهای منفی را طوری می‌نویسند که جزء اعشاری آنها مثبت و فقط جزء صحیح آنها منفی باشد .

اگر لگاریتم مثبت باشد، تصرفی در آن نمی‌کنیم . زیرا اگر مثلا داشته باشیم :

$$\log A = ۳/۴۱۸۲$$

می‌توان نوشت :

$$\log A = ۳ + ۰/۴۱۸۲$$

و جزء اعشاری و قسمت صحیح لگاریتم هر دو مثبت هستند.

اما اگر لگاریتم منفی باشد و مثلا داشته باشیم :

$$\log B = -۵/۸۲۷۱$$

می‌توان نوشت :

$$\log B = -۵ - ۰/۸۲۷۱$$

برای آن‌که جزء اعشاری را مثبت کنیم یك واحد به‌طرف راست تساوی بالا می‌افزاییم و یك واحد از آن کم می‌کنیم :

$$\log B = -۵ - ۱ + ۱ - ۰/۸۲۷۱$$

و یا

$$\log B = -۶ + ۰/۱۷۲۹$$

به این ترتیب قسمت صحیح لگاریتم منفی و جزء اعشاری آن مثبت می‌شود ؛ عدد فوق را چنین می‌نویسیم :

$$\log B = \bar{۶}/۱۷۲۹$$

این طرز نوشتن نشان می‌دهد که فقط قسمت صحیح لگاریتم منفی است و جزء اعشاری آن مثبت است.

بنابراین لگاریتم اعداد بزرگتر از یك مرکب است از یك قسمت صحیح مثبت و یك جزء اعشاری مثبت، ـ در حالی که لگاریتم اعداد مثبت کوچکتر ازیك مرکب است از یك قسمت صحیح منفی و یك جزء اعشاری مثبت .

با این قرارداد می‌توان گفت که

لگاریتم هرعدد ، اعم‌از مثبت یا منفی ، عبارت است از مجموع :

اولا یك قسمت صحیح مثبت یا منفی که آن را مفسّر لگاریتم می‌نامند (مفسر در اینجا یعنی بیان کنندهٔ قسمت صحیح لگاریتم) .

ثانیاً یك جزء اعشاری که همواره مثبت و کوچکتر از واحد است و آن را مانتیس لگاریتم می‌نامند.

کلمهٔ مانتیس لاتینی است و مشتق است از maneo یعنی «نگاه می‌دارم» ومعنی اصلی آن «بقیّه» یا «تتمّه» است.

تمرین

هر یك از اعداد زیر را قسمی بنویسید که جزء اعشاری آنها مثبت باشد :

مثال $-۴/۳۷۲۹=\bar{۵}/۶۲۷۱$

۱	$-۳/۴۶۵۲$	۲	$-۷/۳۲۹۱$
۳	$-۴/۰۰۱۲$	۴	$-۸/۰۱۳۴$
۵	$-۲/۹۹۱۲$	۶	$-۶/۰۰۰۳$
۷	$-۱/۹۹۹۹$	۸	$-۹/۱۱۱۱$

۱۱ـ خاصیت اصلی مانتیس لگاریتم ـ قضیه ـ هرگاه عددی را در یکی از توانهای عدد ده ضرب و یا بر یکی از توانهای عدد ده تقسیم کنیم، مانتیس لگاریتم آن عدد تغییر نمی‌کند.

برهان ـ فرض‌کنیم $\log A=۲/۱۲۷۸$ و بخواهیم با استفاده از آن لگاریتم $A\times ۱۰^{p}$ را حساب کنیم (p عددی است صحیح و مثبت) :

$$\log(A\times ۱۰^{p})=\log A+\log ۱۰^{p} \qquad \text{(قضیهٔ ۱ شمارهٔ ۵)}$$

و یا $\log(A \times 10^p) = 2.1278 + p$ (قضیهٔ ۳ شمارهٔ ۷)

چنان که ملاحظه می‌شود با افزودن عدد صحیح p بر $\log A$ جزء اعشاری آن تغییر نمی‌کند.

اکنون برای بار دوم لگاریتم $\frac{A}{10^p}$ را حساب می‌کنیم ؛ این بار داریم :

$$\log \frac{A}{10^p} = \log A - \log 10^p$$

$$= \log A - p$$

و می توان نوشت :

$$\log \frac{A}{10^p} = 2.1278 - p = (2 - p) + 0.1278$$

اگر $(2 - p)$ مثبت باشد ، مانتیس همان ۰/۱۲۷۸ است.

اگر $(2 - p)$ منفی باشد ، بنابر قرار داد شمارهٔ ۱۰ باز مانتیس مثبت وهمان ۰/۱۲۷۸ می‌باشد.

مثال ـ بعداً خواهیم دید که :

$$\log 184 = 2.2648$$

$$\log 18400 = 4.2648$$

$$\log 1.84 = 0.2648$$

مانتیس همهٔ این لگاریتمها یکی است و فقط مفسر آنها با هم فرق دارد.

۱۲ـ تبصره ـ باید متوجه بود که قضیهٔ فوق فقط در صورتی درست است که جزء اعشاری لگاریتم مثبت باشد.

اگر مثلا مقدار ۷− ۲/۱۲۷۸ را حساب کنیم حاصل می‌شود ۴/۸۷۲۲− و جزء اعشاری عدد تغییر کرده است. قضیهٔ فوق در صورتی صحیح است که این عدد را به صورت $\bar{5}.1278$ بنویسیم

۱۳ـ نتیجه ـ از آنچه گذشت نتیجه می‌شود که برای محاسبهٔ لگاریتم اعداد می‌توان قسمت صحیح لگاریتم و جزء اعشاری آن را جداگانه حساب کرد .

جزء اعشاری یا مانتیس لگاریتم اعداد را حساب و در جدولهای لگاریتمی ثبت کرده‌اند وراه استفاده از این جدولها را بعداً خواهیم آموخت. قسمت صحیح لگاریتم از روی قاعدهٔ زیر به دست می‌آید :

۱۴ـ محاسبهٔ مفسر لگاریتم اعداد

الف ـ (اعداد بزرگتر از یك) ـ اعدادی که بین ۱ و ۱۰ محصورند ، یعنی اعدادی که

قسمت صحیح آنها یك رقم دارد ، لگاریتمشان بین لگاریتم ۱ و لگاریتم ۱۰ یعنی بین صفر و یك محصور است. پس مفسر لگاریتم آنها صفر است (زیرا عددی که بین صفر و یك محصور باشد قسمت صحیحش صفر است).

مثلا مفسر لگاریتم عدد ۲/۸۷۳ صفر است.

همچنین اعدادی که بین ۱۰ و ۱۰۰ محصورند ، یعنی اعدادی که قسمت صحیح آنها دو رقم دارد ، لگاریتمشان بین ۱ و ۲ محصور است. پس مفسر لگاریتم آنها یك است .

مثلا مفسر لگاریتم عدد ۵۲/۳۲ یك است.

به‌طور کلی اعدادی‌که بین 10^p و 10^{p+1} محصورند (p عدد صحیح مثبت یا صفر)، یعنی اعدادی که قسمت صحیح آنها $p+1$ رقم دارد ، لگاریتمشان بین p و $p+1$ محصور است . پس مفسرلگاریتم آنها p است.

مثلا مفسر لگاریتم عدد ۴۷۳/۸ عدد دو است.

از آنچه گذشت قاعدهٔ زیر به‌دست می‌آید :

مفسر لگاریتم هر عدد که بزرگتر از یك باشد مساوی است با عدهٔ ارقام قسمت صحیح آن عدد منهای یك واحد.

ب ـ (اعداد مثبت کوچکتر از یك) ـ اعداد محصور بین ۱ و ۰/۱ که در نوشتن آنها به‌صورت اعشاری فقط یك صفر در سمت چپ آنها به‌کار می‌رود (صفر سمت چپ ممیز) لگاریتمشان بین ۱− و صفر محصور است (زیرا $\log 0/1 = -1$ و $\log 1 = 0$)؛ پس مفسر لگاریتم آنها ۱− است (رجوع کنید به شمارهٔ ۱۰).

مثلا مفسر لگاریتم عدد ۰/۴۸۵ عدد ۱− است.

همچنین اعداد محصور بین ۰/۱ و ۰/۰۱ که در نوشتن آنها به‌صورت اعشاری دوصفر در سمت چپ آنها به‌کار می‌رود لگاریتمشان بین منهای یك و منهای دو محصور است (زیرا $\log 0/1 = -1$ و $\log 0/01 = -2$) ، پس مفسر لگاریتم آنها ۲− است.

مثلا مفسر لگاریتم عدد ۰/۰۷۹۳ مساوی با ۲− است.

به‌طورکلی لگاریتم اعداد محصوربین 10^{-p} و 10^{-p+1} که در نوشتن آنها به صورت اعشاری p صفر در سمت چپ آنها به‌کار می‌رود (صفر سمت چپ ممیز نیز حساب شده است) مفسرشان $-p$ است.

مثلا مفسر لگاریتم عدد ۰/۰۰۰۶۷۲ عدد ۴− است.

از آنچه گذشت قاعدهٔ زیر به‌دست می‌آید :

مفسر لگاریتم اعداد مثبت کوچکتر ازیك منفی است و مقدار آن از حیث قدر مطلق مساوی است با عدهٔ صفرهایی که در سمت چپ عدد وجود دارد (به شرط آن‌که صفر سمت چپ ممیز را

نیز حساب کنیم)

تمرین

مفسر لگاریتم هر یك از اعداد زیر را معین کنید :

۱	۷۵	۲	۷۵/۴
۳	۷۵۴	۴	۷/۵۴
۵	۷۵۴۰	۶	۲۵۷۶
۷	۲۵۷/۸	۸	۲۵/۷۸
۹	۲/۵۷۸	۱۰	۲۵/۷۸۰
۱۱	۰/۸	۱۲	۰/۰۸
۱۳	۰/۸۸	۱۴	۰/۸۸۵
۱۵	۰/۰۰۵	۱۶	۰/۰۰۰۷
۱۷	۰/۰۰۷۷	۱۸	۰/۰۰۰۰۷
۱۹	۰/۱۰۰۰۷	۲۰	۰/۰۷۰۰۷

در صورتی‌که log۳۸۶ = ۲/۵۸۶۶ ، لگاریتم هر یك از اعداد زیر را حساب کنید :

۲۱	۳۸/۶	۲۲	۳/۸۶
۲۳	۰/۳۸۶	۲۴	۰/۰۳۸۶
۲۵	۰/۰۰۰۳۸۶	۲۶	۳۸۶۰۰

در صورتی‌که log۰/۴۷۵ = ۱̄/۶۷۶۷ ، لگاریتم هر یك از اعداد زیر را حساب کنید :

۲۷	۴۷۵	۲۸	۴/۷۵
۲۹	۴۷۵۰۰۰	۳۰	۰/۰۰۰۴۷۵
۳۱	۴۷۵۰	۳۲	۰/۰۴۷۵

۱۵ــ تعیین مانتیس لگاریتم اعداد و به‌کار بردن جدول لگاریتم ـ جزء اعشاری لگاریتم اعداد محصور بین ۱۰۰ و ۱۰۰۰ را که سه رقمی هستند با چهار رقم دهگانی یعنی تا یك ده‌هزارم واحد در جدولهای دو صفحهٔ آخر این کتاب ثبت کرده‌ایم . چون در جداول مذکور مانتیس لگاریتم اعداد با چهار رقم اعشاری ثبت شده است این جدولها را جدول لگاریتمی چهار اعشاری می‌نامند. باید متوجه بود که اعدادی که در این جدولها ثبت شده‌اند مانتیس لگاریتمها هستند ولی از نوشتن مفسرها و گذاردن ممیز در آنها خودداری شده است.

از این جدولها برای حل دو مسئلهٔ زیر می‌توان استفاده کرد :

(الف) ـ عددی معلوم است. می‌خواهیم جزء اعشاری یعنی مانتیس لگاریتم آن را حساب کنیم .

(ب) ـ لگاریتم عددی معلوم است. می‌خواهیم آن عدد را حساب کنیم .

۱۶ـ حل مسئلهٔ الف

اولا ـ عدد مفروض حداکثر سه رقم دارد (بدون در نظر گرفتن ممیز و صفرهای سمت راست عدد)

می‌دانیم (قضیهٔ شمارهٔ ۱۱) که اگر عددی را در یکی از توانهای ده ضرب و یا بریکی از توانهای ده تقسیم کنیم مانتیس لگاریتم آن تغییر نخواهد کرد.

پس مثلا مانتیس لگاریتم اعداد ۵۶ و ۵۶۰ و ۵/۶ و ۰/۵۶ و ۵۶۰۰۰ و ۰/۰۵۶ یکی است و مساوی است با مانتیس لگاریتم عدد سه رقمی ۵۶۰ .

درجدول لگاریتم چهار رقمی، مانتیس لگاریتم اعداد سه‌رقمی ثبت‌شده‌است.دو رقم سمت‌چپ این اعداد (یعنی رقمهای صدگان و دهگان) را باید در ستونی که در بالای آن حرف N نوشته شده خواند و رقم سمت راست (رقم یکان) عدد را باید در سطر بالا یا سطر پایین جدول جستجو کرد .

ضمناً باید به‌خاطر داشت که مفسر لگاریتم اعداد مطابق با قاعده‌ای که درشمارهٔ ۱۴ ذکر کردیم تعیین می‌شود . اینك چند مثال :

مثال ۱ ـ محاسبهٔ log ۱۴۵

می‌دانیم که مفسر لگاریتم این عدد ۲ است. برای تعیین مانتیس آن در ستونی که بالای آن حرف N نوشته شده عدد ۱۴ را می‌یابیم و در سطری که عدد ۱۴ در سمت چپ آن واقع است ازچپ به‌راست پیش می‌رویم تا به ستونی برسیم که در بالای آن رقم ۵ (رقم یکان ۱۴۵) ثبت شده است. در آنجا عدد ۱۶۱۴ را که مانتیس مطلوب است می‌یابیم . پس

log ۱۴۵ = ۲/۱۶۱۴

به همین ترتیب معلوم می‌شود که :

log ۱۴۵۰ = ۳/۱۶۱۴

log ۱۴/۵ = ۱/۱۶۱۴

log ۱۴۵۰۰۰ = ۵/۱۶۱۴

log ۰/۱۴۵ = $\bar{۱}$/۱۶۱۴

log ۰/۰۰۱۴۵ = $\bar{۳}$/۱۶۱۴

همهٔ لگاریتمهای فوق دارای یك مانتیس هستند و فقط مفسرهای آنها با هم تفاوت دارند (چرا ؟)

مثال ۲ ـ محاسبهٔ $log۵$

مفسر لگاریتم این عدد صفر است و مانتیس آن همان مانتیس لگاریتم عدد سه رقمی ۵۰۰ است .

پس در ستون N عدد ۵۰ را می‌یابیم و در سطر ۵۰ به محاذات ستونی که در بالای آن صفر قرار دارد مانتیس مطلوب را که ۶۹۹۰ است می‌یابیم ؛ بنابراین

$$log۵=۰/۶۹۹۰$$

به همین طریق معلوم می‌شود که :

$$log۵۰=۱/۶۹۹۰$$

$$log۰/۵=\bar{۱}/۶۹۹۰$$

$$log۵۰۰۰=۳/۶۹۹۰$$

$$log۰/۰۰۰۵=\bar{۴}/۶۹۹۰$$

همهٔ لگاریتمهای فوق دارای یك مانتیس هستند .

ثانیاً ـ عدد مفروض بیش از سه رقم دارد (بدون در نظر گرفتن ممیز و صفرهای سمت راست عدد).

مثال ۳ ـ فرض کنیم که می‌خواهیم لگاریتم عدد ۱۵۱/۸ را حساب کنیم .

این عدد بین دو عدد ۱۵۱ و ۱۵۲ محصور است :

$$۱۵۱<۱۵۱/۸<۱۵۲$$

از طرف دیگر بنابر آنچه گذشت و مطابق با جدول لگاریتم داریم :

$$log۱۵۱=۲/۱۷۹۰$$

$$log۱۵۲=۲/۱۸۱۸$$

تفاوت این دو لگاریتم که به تفاوت جدولی موسوم است و آن را با حرف D نشان می‌دهیم عبارت است از $D=۰/۰۰۲۸$.

حال قبول می‌کنیم که وقتی عدد از ۱۵۱ تا ۱۵۲ تغییر می‌کند تغییر لگاریتم آن متناسب با تغییر خود عدد است. به عبارت دیگر قبول می‌کنیم که وقتی $\frac{۸}{۱۰}$ به عدد ۱۵۱ افزوده شود ،

$$۰/۰۰۲۸\times\frac{۸}{۱۰}=۰/۰۰۲۲۴$$

به لگاریتم آن افزوده خواهد شد . پس :

$$\log 151/8 = 2/1790 + 0/00224 = 2/18124$$

فقط چهار رقم اعشاری این عدد را نگاه می‌داریم و می‌نویسیم :

$$\log 151/8 = 2/1812$$

اگر رقم پنجم اعشاری که آن را حذف کردیم ۵ یا ۶ یا ۷ یا ۸ یا ۹ بود رقم چهارم اعشاری را یک‌واحد زیاد می‌کردیم . (گردکردن اعداد)

اعمال فوق را چنین می‌نویسند :

$\log 151/0$	$2/1790$
8	$224 \quad (D = 28)$
$\log 151/8$	$2/1812$

مثال ۴ ـ محاسبهٔ $\log 22576$

مفسر این لگاریتم عدد ۴ است و مانتیس آن مساوی است با مانتیس لگاریتم ۲۲۵/۷۶ ؛ اما مانتیس نظیر ۲۲۵ عدد ۳۵۲۲ و تفاوت جدولی آن $D = 19$ است ، پس باید $\frac{76}{100}$ عدد ۰/۰۰۱۹ را به مانتیس فوق اضافه کنیم :

$\log 22500$	$4/3522$
76	$144 \quad (D = 19)$
$\log 22576$	$4/35364$

در اینجا هم چهار رقم اعشاری لگاریتم را نگاه می‌داریم و می‌نویسیم

$$\log 22576 = 4/3536$$

مثال ۵ ـ محاسبهٔ $\log 0/01213$

مانند فوق عمل می‌کنیم :

$\log 0/0121$	$\bar{2}/0828$
3	$108 \quad (D = 36)$
$\log 0/01213$	$\bar{2}/08388$

در اینجا هم چهار رقم اعشاری لگاریتم را نگاه می‌داریم و چون رقم پنجم اعشاری ۸ است پس از حذف کردن آن یك واحد به رقم بعدی یعنی ۸ می‌افزاییم می‌شود

$$\log 0/01213 = \bar{2}/0839$$

۱۷ ـ حل مسئلهٔ ب ـ وقتی که لگاریتم عددی معلوم باشد و بخواهیم آن عدد را پیدا کنیم (این عدد را معمولا «آنتی لگاریتم» یا «عدد ما به ازای» لگاریتم معلوم می‌نامند) دوحالت ممکن است رخ دهد:

اولاً ـ مانتیس لگاریتم مفروض در جدول موجود است.

مثال ۱ ـ محاسبهٔ x به فرض آن‌که $\log x = ۳/۸۷۶۸$

در ستونهای مانتیس جدول عدد ۸۷۶۸ را می‌یابیم. این مانتیس در سطری قرار دارد که در سمت چپ آن در ستون N عدد ۷۵ نوشته شده و در ستونی قرار دارد که در بالای آن عدد ۳ نوشته شده است. پس عدد سه رقمی نظیر مانتیس ۸۷۶۸ عدد ۷۵۳ است. ازطرف دیگر چون مفسر لگاریتم مفروض ۳ است پس عدد مطلوب دارای چهار رقم می‌باشد یعنی :

$$x = ۷۵۳۰$$

ثانیاً ـ مانتیس لگاریتم مفروض عیناً در جدول موجود نیست.

مثال ۲ـ محاسبهٔ x به فرض آن که $\log x = \bar{۲}/۶۹۵۷$

درستونهای مانتیس عدد ۶۹۵۷ موجود نیست ولی دو عدد ۶۹۵۵ و ۶۹۶۴ راکه پیاپی یکدیگر در جدول نوشته شده و مانتیس ۶۹۵۷ محصور بین‌آنهاست می‌یابیم‌که اولی نظیرعدد ۴۹۶ و دومی نظیر عدد ۴۹۷ است.

تفاوت بین دو مانتیس مذکورکه در جدول موجود است $D = ۹$ است. و تفاوت مانتیس کوچکتر با مانتیس مفروض عبارت است از $۶۹۵۷ - ۶۹۵۵ = ۲$

حال چنین می‌گوییم: اگر یك واحد به عدد ۴۹۶ اضافه شود به مانتیس لگاریتم آن ۹ ده هزارم افزوده می‌گردد پس چه عددی باید به عدد مفروض افزود تا به‌مانتیس لگاریتم آن ۲ ده هزارم افزوده گردد. جواب $\frac{۲}{۹}$است و عدد مطلوب عبارت است از ۴۹۶/۲۲۲.

اما مفسر لگاریتم مفروض ۲ــ است پس باید دو صفر در سمت چپ عدد فوق قرار داد

پس : $x = ۰/۰۴۹۶۲۲۲$

از عدد فوق فقط چهار رقم اعشاری غیر از صفر نگاه می‌داریم حاصل می‌شود :

$$x = ۰/۰۴۹۶۲$$

این عمل را چنین می‌نویسند :

$$\log x = \bar{۲}/۶۹۵۷$$

۴۹۶	۶۹۵۵		۲ | ۹
۰۲	۲	(D=۹)	۰/۲

$x = ۰/۰۴۹۶۲$

مثال ۳ـ محاسبهٔ x به فرض آن‌که $\log x = ۵/۳۲۷۳$

صورت عمل چنین است :

$$\log x = ۵/۳۲۷۳$$

۲۱۲	۳۲۶۳	(D=۲۱)	۱۰ | ۲۱
۰۵	۱۰		۰/۴۷

در این مثال باید $\frac{۱۰}{۲۱}$ را حساب کنیم حاصل می‌شود ۰/۴۷ چون می‌خواهیم فقط چهار رقم نظیر مانتیس مفروض داشته باشیم و رقم دوم سمت راست ۰/۴۷ رقم ۷ است به جای ۰/۴۷ می‌نویسیم ۰/۵ .

چون مفسر لگاریتم مفروض ۵ است عدد x باید ۶ رقم داشته باشد بنابراین دو صفر در سمت راست عدد حاصل یعنی ۲۱۲۵ می‌افزاییم حاصل می‌شود

$$x = ۲۱۲۵۰۰$$

تمرین

لگاریتم هر یك از اعداد زیر را بیابید :

۱	۱۲۴	۲	۱/۲۴
۳	۱۲/۴	۴	۱۲۴۰
۵	۱۲۴۰۰۰	۶	۰/۱۲۴
۷	۰/۰۰۱۲۴	۸	۳۵۶
۹	۰/۳۵۶	۱۰	۳۵۶۰۰۰
۱۱	۶/۷۲	۱۲	۰/۰۳۴۵
۱۳	۰/۰۰۰۳۴۶	۱۴	۲۰۸
۱۵	۸۰۰	۱۶	۸۰
۱۷	۸	۱۸	۰/۰۰۵
۱۹	۹۹۹	۲۰	۰/۰۰۱

لگاریتم هر یك از اعداد زیر را حساب کنید :

۲۱	۲/۱۵۶	۲۲	۳۸۴۵
۲۳	۴۴۸۳	۲۴	۵۵۸۱
۲۵	۷۰۰۷	۲۶	۰/۰۷۵۸۹
۲۷	۱۲/۳۴	۲۸	[illegible]

اعدادی را که لگاریتم آنها در زیر داده شده است حساب کنید :

۲۹	۳/۸۵۳۱	۳۰	[illegible]
۳۱	$\overline{۲}$/۸۲۶۷	۳۲	[illegible]

۳۳	۰/۱۸۷۵	۳۴	۲̅/۳۹۲۷
۳۵	۴/۹۳۶۰	۳۶	۲/۶۷۱۵
۳۷	۴/۱۸۵۳	۳۸	۰/۹۲۴۵
۳۹	۱̅/۶۰۸۹	۴۰	۲̅/۸۹۰۷
۴۱	۳̅/۲۴۰۹	۴۲	۵/۷۹۹۳

۲ فصل

محاسبات لگاریتمی و موارد استعمال آن

I ـ اعمال مربوط به لگاریتم

۱ـ اعمال جمع و تفریق و ضرب و تقسیم در بارهٔ لگاریتمها مانند معمول انجام می‌گیرد مگر در صورتی که مفسر بعضی از لگاریتمها منفی باشد. پیش از آن‌که به ذکر چگونگی این اعمال بپردازیم برای آن‌که عمل تفریق لگاریتمها را به عمل جمع تبدیل نماییم کُلگاریتم را تعریف می‌کنیم .

۲ـ کُلگاریتم یك عدد ـ لگاریتم عکس هر عدد را کلگاریتم آن عدد می‌نامند . پس :

$$colog\,A = log\frac{1}{A} = log\,1 - log\,A = -log\,A$$

بنابراین : کلگاریتم هر عدد عبارت است از قرینهٔ لگاریتم همان عدد .

۳ـ طریقهٔ نوشتن کُلگاریتم ـ اولا فرض می‌کنیم $log\,A = 3/7852$ باشد. پس :

$$colog\,A = -3/7852$$

برای این که این عدد را مانند لگاریتمها با جزء اعشاری مثبت بنویسیم چنین عمل می‌کنیم :

$$colog\,A = -3 - 1 + 1 - 0/7852 = \bar{4}/2148$$

ثانیاً هرگاه $log\,A = \bar{5}/1879$ باشد داریم :

$$colog\,A = 5 - 0/1879$$

و یا

$$colog\,A = 4 + (1 - 0/1879) = 4/8121$$

و از این رو قاعدهٔ زیر به‌دست می‌آید .

> هرگاه یك واحد بر قسمت صحیح (مفسر) لگاریتم عددی بیفزاییم و سپس علامت آن‌را تغییر دهیم ، مفسر کلگاریتم آن عدد به دست می‌آید . و اگر مانتیس لگاریتم عددی را از یك واحد کم کنیم ، مانتیس کلگاریتم آن عدد حاصل می‌شود. همین قاعده برای پیدا کردن لگاریتم یك عدد از روی کلگاریتم آن نیز به‌کار می‌رود.

۴ـ مورد استعمال کُلگاریتم ـ به‌وسیلهٔ استعمال کلگاریتم می‌توان عمل تفریق

کردن یك لگاریتم را به عمل جمع تبدیل کرد : لگاریتم هر کسر مساوی است با لگاریتم صورت آن به‌علاوهٔ کلگاریتم مخرجش .

مثال ـ اگر داشته باشیم $x=\frac{ab}{cd}$ به جای آن‌که بنویسیم :

$$\log x = \log a + \log b - \log c - \log d$$

می‌نویسیم :

$$\log x = \log a + \log b + \operatorname{colog} c + \operatorname{colog} d$$

و به این ترتیب برای محاسبهٔ $\log x$ فقط یك عمل جمع لازم است.

تمرین

کلگاریتم هر یك از اعداد زیر را حساب کنید :

۱	۲۵	۲	۱۳۰
۳	۲۷/۴	۴	۴۲۷
۵	۵/۸۳	۶	۰/۲۱
۷	۵۱/۶	۸	۷۲/۵
۹	۰/۰۸۳	۱۰	۰/۰۰۷۲۶
۱۱	۳/۰۰۷	۱۲	۶۲/۰۹
۱۳	۰/۰۰۰۶	۱۴	۰/۹۹۹

۵ـ اعمال راجع به لگاریتمهایی که مفسر آنها منفی است ـ اعمالی‌که باید در بارهٔ لگاریتمها انجام داد عبارت است از جمع و ضرب در یك عدد صحیح مثبت و تقسیم بر یك عدد صحیح مثبت (با درنظر گرفتن کلگاریتم، چنان‌که دیدیم ، عمل تفریق مورد احتیاج واقع نمی‌شود).

الف ـ جمع لگاریتمها و کلگاریتمها ـ مانتیسها را با هم جمع و واحدهای صحیح حاصل را که مثبت است با مجموع جبری مفسرها جمع می‌کنیم :

مثال

$\bar{1}$/۴۲۸۷

۱/۸۲۴۳

$\bar{3}$/۵۱۴۵

۲/۲۵۲۲

$\bar{2}$/۲۰۵۲

$\bar{1}$/۲۲۴۹

ب ـ ضرب در یك عدد صحیح مثبت ـ عدد صحیح را مثل معمول در مانتیس ضرب کرده واحدهای صحیح حاصل راکه مثبت است با حاصل ضرب عدد درمفسر جمع جبری می‌کنیم.

مثال :
$$\bar{۷}/۴۱۵۲ \times ۳ = \overline{۲۰}/۲۴۵۶$$

ج ـ تقسیم بر یك عدد صحیح مثبت ـ اگر مفسر مثبت باشد ، عمل تقسیم مانند تقسیم معمولی انجام می‌گیرد . اما اگر مفسر منفی باشد ، آن قدر واحد منفی بر آن می‌افزاییم تا مفسر بر مقسوم‌علیه قسمت‌پذیر شود و برای آن‌که تغییری در خارج قسمت پیدا نشود به‌همان اندازه واحد مثبت بر مانتیس افزوده حاصل را بر مقسوم علیه تقسیم می‌کنیم .

مثال :

$$\bar{۷}/۲۵۴۹ : ۵ = (-۱۰+۳/۲۵۴۹) : ۵$$
$$= -۲+۰/۶۵۰۹۸$$
و پس از گرد کردن
$$= \bar{۲}/۶۵۱۰$$

تمرین

اعمال زیر را انجام دهید :

۱ $\bar{۲}/۱۴۷۵ + ۳/۸۲۷۶ + \bar{۴}/۰۷۲۳$

۲ $۰/۲۱۳۲ + \bar{۴}/۲۱۰۵ + \bar{۳}/۵۲۳۱$

۳ $\bar{۳}/۴۷۲۵ + \bar{۲}/۳۱۲۹ + ۵/۸۷۹۳$

۴ $\bar{۲}/۶۷۲۹ \times ۵$

۵ $\bar{۷}/۲۳۹۲ \times ۲$

۶ $\bar{۵}/۳۲۴۷ : ۶$

۷ $\bar{۳}/۷۲۹۱ : ۷$

۸ $\bar{۶}/۶۲۸۷ : ۴$

II ـ محاسبه به وسیلهٔ لگاریتم

۶ـ درشماره‌های ۴ ، ۵ ، ۶ ، ۷ و ۸ فصل دوم همین بخش خواص لگاریتم و دستورهای مربوط به آن را شرح دادیم . با استفاده از این دستورها می‌توان اعمال ضرب و تقسیم و به توان رساندن و ریشه گرفتن را به وسیلهٔ لگاریتم انجام داد. اینك چند مثال :

۷ ـ ضرب ـ محاسبهٔ $a = ۲۶/۱۳ \times ۰/۸۱۵$

از دستور $\log A.B = \log A + \log B$ حاصل می‌شود :

$$\log a = \log ۲۶/۱۳ + \log ۰/۸۱۵$$

$$\log ۲۶/۱۳ = ۱/۴۱۷۱$$

$$\log ۰/۸۱۵ = \bar{۱}/۹۱۱۲$$

$$\log a = ۱/۳۲۸۳$$

$$\boxed{a = ۲۱/۳۰}$$

۸ـ تقسیم ـ محاسبهٔ $b = \frac{۲۶/۱۳}{۰/۸۱۵}$

از دستور $\log \frac{A}{B} = \log A - \log B = \log A + \mathrm{colog}\, B$

حاصل می‌شود :

$$\log b = \log \frac{۲۶/۱۳}{۰/۸۱۵} = \log ۲۶/۱۳ + \mathrm{colog}\, ۰/۸۱۵$$

$$\log ۲۶/۱۳ = ۱/۴۱۷۱ \qquad \log ۰/۸۱۵ = \bar{۱}/۹۱۱۲$$

$$\mathrm{colog}\, ۰/۸۱۵ = ۰/۰۸۸۸$$

$$\log b = ۱/۵۰۵۹$$

$$\boxed{b = ۳۲/۰۶}$$

۹ـ به‌توان رساندن ـ محاسبهٔ $c = (۰/۷۵)^{۶}$

از دستور $\log A^{m} = m \log A$ حاصل می‌شود :

$$\log c = ۶ \log ۰/۷۵$$

$$= ۶ \times \bar{۱}/۸۷۵۱$$

پس : $\log c = \bar{۱}/۲۵۰۶$

$$\boxed{c = ۰/۱۷۸۱}$$

۱۰ـ ریشه گرفتن ـ محاسبهٔ $d = \sqrt[۶]{۰/۷۵}$

از دستور $\log \sqrt[m]{A} = \frac{۱}{m} \log A$ حاصل می‌شود :

$$\log d = \frac{۱}{۶} \log ۰/۷۵$$

$$= \frac{۱}{۶} \times \bar{۱}/۸۷۵۱$$

پس : $\log d = \bar{۱}/۹۷۹۲$

$$\boxed{d = ۰/۹۵۳۲}$$

۱۱- در مثالهای قبل اعمال ضرب و تقسیم و به توان رساندن و ریشه گرفتن را با استفاده از لگاریتم شرح دادیم. با استفاده ازخواص لگاریتم می‌توان محاسبهٔ عبارات دیگری را که شامل دو یا چند عمل از اعمال فوق هستند نیز انجام داد:

۱۲- مثال ۱ - محاسبهٔ عبارت

$$E=\frac{۳۹/۱۲\sqrt[۳]{۰/۷۲۱۶}}{(۲۴/۳۷)^{۲}}$$

بهتر است محاسبات را به طریق زیر بنویسیم:

دستور:

$$\log E=\log ۳۹/۱۲+\frac{۱}{۳}\log ۰/۷۲۱۶+۲\,\mathrm{colog}\,۲۴/۳۷$$

محاسبات فرعی	محاسبات اصلی
$\log ۰/۷۲۱۶=\bar{۱}/۸۵۸۳$	$\log ۳۹/۱۲=۱/۵۹۲۴$
$\log ۲۴/۳۷=۱/۳۸۶۹$	$\frac{۱}{۳}\log ۰/۷۲۱۶=\bar{۱}/۹۵۲۸$
$\mathrm{colog}\,۲۴/۳۷=\bar{۲}/۶۱۳۱$	$۲\,\mathrm{colog}\,۲۴/۳۷=\bar{۳}/۲۲۶۲$
	$\log E=\bar{۲}/۷۷۱۴$
	$\boxed{E=۰/۰۵۹۰۷۵}$

۱۳- مثال ۲- محاسبهٔ عبارت

$$P=\frac{\sqrt{۰/۸۷۳۰}}{\sqrt[۴]{۳۷/۳۱}\times(۴/۸۶۳)^{۳}}$$

دستور:

$$\log P=\frac{۱}{۲}\log ۰/۸۷۳۰+\frac{۱}{۴}\mathrm{colog}\,۳۷/۳۱+۳\,\mathrm{colog}\,۴/۸۶۳$$

محاسبات فرعی	محاسبات اصلی
$\log ۰/۸۷۳۰=\bar{۱}/۹۴۱۰$	$\frac{۱}{۲}\log ۰/۸۷۳۰=\bar{۱}/۹۷۰۵$
$\log ۳۷/۳۱=۱/۵۷۱۸$	$\frac{۱}{۴}\mathrm{colog}\,۳۷/۳۱=\bar{۱}/۶۰۷۰$
$\mathrm{colog}\,۳۷/۳۱=\bar{۲}/۴۲۸۲$	$۳\,\mathrm{colog}\,۴/۸۶۳=\bar{۳}/۹۳۹۳$
$\log ۴/۸۶۳=۰/۶۸۶۹$	$\log P=\bar{۳}/۵۱۶۸$
$\mathrm{colog}\,۴/۸۶۳=\bar{۱}/۳۱۳۱$	$\boxed{P=۰/۰۰۳۲۸۷}$

تمرین

مقدار هر یك از عبارات زیر را حساب کنید :

۱. $۲۷/۳۱ \times ۵/۴۱۲$

۲. $۰/۰۲۷۳ \times ۴۵/۱۲$

۳. $۰/۰۰۲۸۹۱ \times ۰/۸۳۹۲$

۴. $۳۶۰۰ \times ۰/۸۳۹۲$

۵. $۴/۲۱۲ \times ۱۳/۶۴ \times ۷/۲۸$

۶. $\frac{۷۶۲۱}{۲۳۴۵}$

۷. $\frac{۸۹/۲۱}{۶۸۱۹}$

۸. $\frac{۰/۰۸۵۲}{۲۸۶۰}$

۹. $\frac{۰/۰۰۶۱۹۵}{۰/۶۳۴۵}$

۱۰. $\frac{۳/۸۱۲ \times ۲/۸۶۵}{۲۷/۱۳}$

۱۱. $\frac{۰/۵۴۱۶}{۳/۴۲۰ \times ۰/۰۳۳۳}$

۱۲. $(۲/۷۱۸)^{۵}$

۱۳. $(۰/۰۱۲۳۴)^{۸}$

۱۴. $\frac{(۲/۷۶)^{۳}}{۷/۰۲}$

۱۵. $\frac{۴۲۷}{(۱۷/۵)^{۳}}$

۱۶. $\left(\frac{۰/۰۲۶۱۸}{۳/۶۱۲}\right)^{۷}$

۱۷. $\frac{۰/۲۹۷۳ \times (۸/۵۶)^{۳}}{۷/۱۲}$

۱۸. $\sqrt{۵۹/۷}$

۱۹. $\sqrt[۳]{۸/۳۷}$

۲۰. $\sqrt[۴]{۵۰۵}$

۲۱. $\sqrt[۳]{۷/۶۲}$

۲۲. $\sqrt[۷]{۰/۲۱۴}$

۲۳. $\sqrt[۴]{۰/۰۱۲۹}$

۲۴. $\sqrt[۴]{۸۷۱}$

۲۵. $(۲۶۸/۲)^{\frac{۲}{۳}}$

۲۶. $\sqrt{۳/۱۴ \times ۲/۷۱۸}$

۲۷. $\sqrt{\frac{۲۷۳۴}{۳۵/۴۲}}$

۲۸. $\sqrt[۳]{\frac{۳/۱۴۲}{۲/۷۱۸}}$

۲۹. $(۱/۳۰)^{۲۰}$

۳۰. $(۰/۵۴۶۲)^{-۳}$

۳۱. $(۴/۲۱۱)^{-\frac{۱}{۳}} \times (۰/۴۰۷)^{-۲}$

۳۲. $\sqrt[۳]{(۲/۱۳۴)^{۵}}$

۳۳. $\frac{(۶/۴۱۸۷)^{\frac{۱}{۵}}}{(۰/۴۱۸)^{\frac{۴}{۳}}}$

۳۴ $\quad ۶/۷۱\sqrt[۳]{\frac{۱۷۸۴}{۰/۳۰۷}}$ $\qquad$ ۳۵ $\quad \sqrt[۵]{\frac{(۲۳۸)^۲}{(۲/۶۳۴)^۳}}$

۳۶ $\quad \frac{۰/۰۰۰۹۲۵}{\sqrt{(۴/۰۱۵)^۳}}$ $\qquad$ ۳۷ $\quad \frac{(۴۰۱/۳)^۲\sqrt[۴]{۶۱۲۰}}{۹۳/۱^۲}$

III‌ـ معادلات توانی

۱۴ـ تعریف ـ معادلهٔ توانی معادله‌ای است که مجهول آن نمای یك توان باشد.

مانند $\quad ۵^x=۱۲۵ \quad , \quad ۲^{-x}=۳۲ \quad , \quad ۴^x=۱۵$

به‌طور کلی در معادلهٔ توانی $a^x=b$ اعداد a و b باید مثبت و a باید مخالف با یك باشد (چرا ؟)

گاهی می‌توان معادلات توانی را بدون استفاده از لگاریتم حل کرد ولی در حالت‌کلی برای حل معادلات توانی از لگاریتم استفاده می‌شود. اینك روش حل‌کردن این‌گونه معادلات را با ذکر چند مثال بیان می‌کنیم .

۱۵ـ مثال ۱ ـ حل معادلهٔ $۵^x=۱۲۵$

می‌توان نوشت : $۵^x=۵^۳$ پس $\boxed{x=۳}$

۱۶ـ مثال ۲ ـ حل معادلهٔ $۲^{-x}=۳۲$

داریم : $۲^{-x}=۲^۵$ پس $-x=۵$ و $\boxed{x=-۵}$

۱۷ـ مثال ۳ـ حل معادلهٔ $۳^x=۲۴۳$

می‌توان نوشت $۳^x=۳^۵$ پس $\boxed{x=۵}$

۱۸ـ مثال ۴ـ حل معادلهٔ $۴^x=۱۵$

این معادله را نمی‌توان مستقیماً حل‌کرد. از دو طرف معادله لگاریتم می‌گیریم حاصل می‌شود :

$$x\log ۴=\log ۱۵$$

پس : $$x=\frac{\log ۱۵}{\log ۴}=\frac{۱/۱۷۶۱}{۰/۶۰۲۱}$$

$$\log ۱/۱۷۶۱=۰/۰۷۰۴$$
$$\operatorname{colog} ۰/۶۰۲۱=۰/۲۲۰۳$$

$$\log x=۰/۲۹۰۷$$
$$\boxed{x=۱/۹۵۳}$$

(توجه کنید که $\frac{\log ۱۵}{\log ۴}$ مساوی با $\log\frac{۱۵}{۴}$ نیست !)

۱۹ــ مثال ۵ــ حل معادلهٔ $۳^x=\frac{۲}{۳}$

داریم $x\,log\,۳=log\,۲+colog\,۳$

و از آنجا

$$x=\frac{log\,۲+colog\,۳}{log\,۳}=\frac{۰/۳۰۱۰+\bar{۱}/۵۲۲۹}{۰/۴۷۷۱}=\frac{\bar{۱}/۸۲۳۹}{۰/۴۷۷۱}$$

$$=\frac{-۰/۱۷۶۱}{۰/۴۷۷۱}=-۰/۳۶$$

$$\boxed{x=-۰/۳۶}$$

۲۰ــ مثال ۶ــ حل معادلهٔ $۲^x-۱۲۵=\frac{۳۸۴}{۲^x}$

چون مخرج را از بین ببریم حاصل می‌شود :

$$۲^{۲x}-۱۲۵\times ۲^x-۳۸۴=۰$$

این معادله بر حسب ۲^x از درجهٔ دوم است . یعنی اگر ۲^x را مجهول گرفته آن را y بنامیم $(y=۲^x)$ داریم :

$$y^۲-۱۲۵y-۳۸۴=۰$$

ریشه‌های این معادله $y'=-۳$ و $y''=۱۲۸$ است .

اما ریشهٔ $y'=-۳$ یعنی $۲^x=-۳$ قابل قبول نیست (چرا ؟)

ریشهٔ دیگر را می‌توان چنین نوشت . $۲^x=۱۲۸$

و یا $۲^x=۲^۷$ و از آنجا $\boxed{x=۷}$

تمرین

معادلات زیر را حل کنید :

۱ $۲^x=۱۶$ ۲ $۴^x=۱۶$

۳ $۳^x=۲۷$ ۴ $۳^{-x}=۲۴۳$

۵ $۳^{x-۲}=۸۱$ ۶ $۵^{x-۲}=۱۲۵$

۷ $۶^{-x}=۲۱۶$ ۸ $۷^x=۳۴۳$

۹ $۲^{x-۶}=۸$ ۱۰ $log\,۲x=۱/۶۴۳۵$

۱۱ $log\,x^۲=۲/۲۲۷۹$ ۱۲ $۳^{۲x+۱}=۲۴۵$

۱۳ $(1/24)^x = 2/3$ ‏ ۱۴ $(1/46)^x = 1/96$

۱۵ $2^x + 4^x = 272$

۱۶ $3 \times 3^x + \frac{18}{3^x} = 29$

۱۷ $4^{x+1} + \frac{64}{4^x} = 257$

۱۸ $\log(x^2 - 7) = 2\log(x + 3)$

۱۹ $2\log x - 1 = \log(x - \frac{25}{10})$

۲۰ $\log(x^2 - 1) - \log(x^2 - 7x + 12) = \log 4$

بخش چهارم

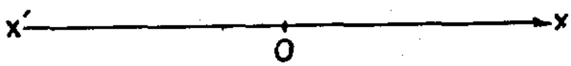
هندسهٔ تحلیلی

فصل ۱

مختصات نقطه
(ومسائل مربوط به‌آن)

I ـ تعاریف مقدماتی

۱ـ محور ـ یك نقطه می‌تواند روی خط راست نامحدود $x'x$ در دو جهت مختلف حرکت کند (از x' به‌طرف x یا از x به‌طرف x') . اگر یکی از این دوجهت مثلا جهت از x' به‌طرف x راجهت مثبت ودیگری را جهت منفی‌بنامیم خطراست $x'x$ که به‌این‌ترتیب‌جهت گذاری



(شکل۱)

شده است محور نامیده می‌شود (معمولا وقتی محور $x'x$ افقی رسم شود x' را در سمت چپ و x را درسمت راست می‌نویسند).

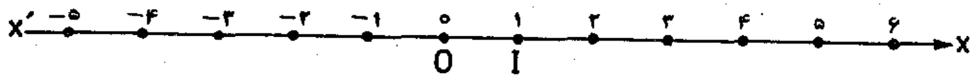
محور، خط راست نامحدودی است‌که روی آن جهت اختیار کرده باشیم .

جهت مثبت محور را معمولا به‌وسیلهٔ یك‌پیکان، مانند شکل ۱ ، نشان می‌دهند. معمولا روی هر محور نقطهٔ ثابتی (مانند نقطهٔ O روی شکل ۱) اختیار کرده آن را مبدأ می‌نامند تا بتوان وضع نقاط دیگر محور را نسبت به‌آن درنظر گرفت.

برای آن‌که برسانیم‌که نقطهٔ O مبدأ محور $x'x$ است می‌نویسیم : محور $x'Ox$.

۲ـ تناظر یك‌به‌یك بین اعداد حقیقی ونقاط یك محور ـ برحسب قرارداد، و برای سهولت بیان، محور $x'Ox$ را افقی و جهت مثبت آن را از چپ به‌طرف راست اختیار می‌نماییم .

مبدأ O را نقطهٔ ۰ (صفر)می‌نامیم و در سمت راست مبدأ O نقطهٔ I را طوری می‌گیریم که اندازهٔ پاره‌خط OI مساوی با واحد طول باشد و نقطهٔ I را نقطهٔ ۱ (یك) می‌نامیم واصل زیر را می‌پذیریم:

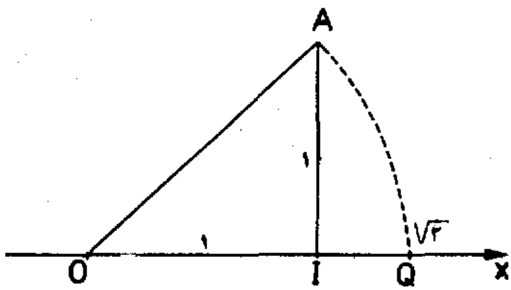


(شکل۲)

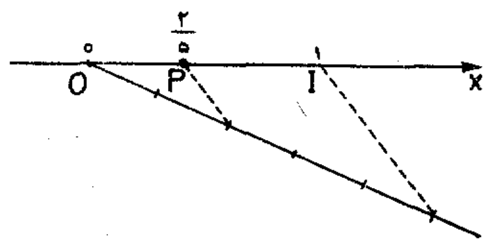
نظیر هر عدد حقیقی (چه گویا و چه‌گنگ) یك وفقط یك نقطه روی محور می‌توان یافت. و برعکس هرنقطه که روی محور واقع باشد نظیر یك و فقط یك عدد حقیقی است.

نقاط نظیر عددهای صحیح نسبی متوالی (یعنی عضوهـای مجموعهٔ Z) روی محور به فاصله‌های متساوی قرار دارند. مبدأ نظیر عدد صفر ونقطهٔ I نظیر عدد ۱ است (شکل۲).

می‌دانیم که نقاط نظیر عددهای گویا و برخی از عددهای گنگ را می‌توان به وسیلهٔ خط‌کش و پرگار روی محور معین کرد. مثلا درشکل ۳ نقطهٔ P نظیر عدد گویای $\frac{۲}{۵}$ و در شکل ۴ نقطهٔ Q نظیر عدد گنگ $\sqrt{۲}$ است (چگونه این نقاط به‌دست آمده‌اند؟).



(شکل۴)



(شکل۳)

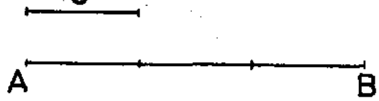
نقاط نظیر عددهای گنگ دیگر را می‌توان به‌تقریب روی محور معین ساخت.

نقاط نظیر عددهای حقیقی مثبت روی محور درطرف راست‌مبدأ O و نقاط نظیرعددهای حقیقی منفی درطرف چپ مبدأ O واقع هستند. برعکس هرنقطه که روی محوردرسمت راست‌مبدأ O باشد نظیر یك عدد حقیقی مثبت و هرنقطه که روی محور در طرف چپ مبدأ O واقع باشد نظیر یك عدد حقیقی منفی است.

۳ـ طول یا درازای یك پاره خط ـ اگربخواهیم اندازهٔ یك پاره‌خط مانند AB را برحسب پاره‌خط دیگری مانند U که‌آن را واحدگرفته‌ایم تعیین‌کنیم، سه حالت رخ می‌دهد:

الف ـ ممکن است پاره خط U (یعنی واحد طول) به **دفعات** صحیح ، مثلا سه مرتبه در پاره‌خط AB بگنجد (شکل۵). دراین صورت می‌گوییم که اندازهٔ پاره خط AB مساوی با عدد صحیح ۳ است و می‌نویسیم:

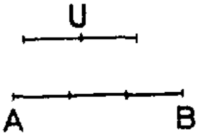
$$AB = BA = ۳$$



(شکل ۵)

ب ـ ممکن است واحد U خود به دفعات صحیح درپاره خط AB نگنجد ولی مثلاً اگر واحد U را به دوقسمت متساوی تقسیم کنیم ، یکی از آنها سه‌بار در AB بگنجد (شکل۶) در این صورت می‌گوییم که طول پاره خط AB مساوی است با عدد گویای $\frac{۳}{۲}$ ومی‌نویسیم :

$$AB=\frac{۳}{۲}$$



(شکل ۶)

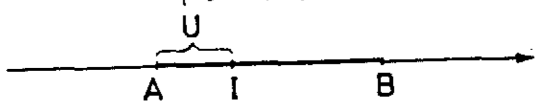
ج ـ اما ممکن است هرچه پاره خط U (یعنی واحد) را به پاره‌های کوچکتر تقسیم کنیم بازهیچ‌یك از آنها به دفعات صحیح در AB نگنجد .

در اینجا این سؤال پیش می‌آید که پس در این حالت اندازهٔ طول پاره خط AB چیست ؟

جواب این سؤال با دقت کردن در اصلی که در فوق یاد آوری کردیم معلوم می‌شود .

درواقع ازاصل مذکور نتیجه می‌شود که : هرپاره خط که دو سرآن برهم منطبق نباشند متناظر با یك عدد حقیقی مثبت است . به‌عبارت دیگر، برای هرپاره خط با شرط فوق یك وفقط یك عدد حقیقی مثبت وجود دارد .

برای روشن شدن این موضوع کافی است پاره خط AB (شکل ۷) را از دوطرف امتداد دهیم وخط راست حاصل را محور اختیارکنیم به قسمی که یك‌سر پاره خط ، مثلا نقطهٔ A، مبدأ آن وجهت از A به طرف B جهت مثبت آن باشد و روی این محور و درجهت مثبت آن نقطهٔ I را به قسمی که AI=U باشد نظیر نقطهٔ ۱ (یك) بگیریم .



(شکل ۷)

با این مقدمات واضح است که بنا براصل مذکور همیشه نظیر نقطهٔ B یك و فقط یك عدد حقیقی ومثبت می‌توان یافت .

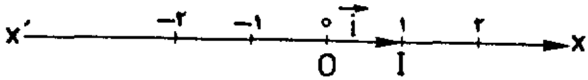
این عدد حقیقی و مثبت را اندازهٔ طول یا به طور خلاصه طول پاره خط AB یا BA برحسب واحد U می‌نامند .

فاصلهٔ دونقطهٔ A و B یعنی طول پاره خط AB .

اگر دو سر پاره خط برهم منطبق باشند ، طول آن صفر است .

توجه کنید ـ البته وقتی می‌توان ازیك عدد به‌نام طول یك‌پاره خط گفتگو کرد که یك پاره خط معین‌را به‌عنوان واحد طول‌انتخاب کرده‌باشیم . اگرواحد را تغییر دهیم ، واضح است که این‌عدد تغییر خواهد کرد.

۴ ـ بردار واحد محور ـ روی محور $x'x$ (شکل ۸) نقطه‌ای مانند O را مبدأ اختیار کرده نقطهٔ I را روی $x'x$ طوری می‌گیریم که طول OI مساوی با واحد طول و جهت $\overrightarrow{OI}$ همان جهت مثبت محور باشد. دراین صورت بردار $\overrightarrow{OI}$ را بردار واحد محور $x'x$ می‌نامند و می‌گویند



($\vec{i}$ بردار واحد محور $x'x$ است)

(شکل ۸)

محور $x'x$ با بردار $\vec{i}$ مدرج شده است.

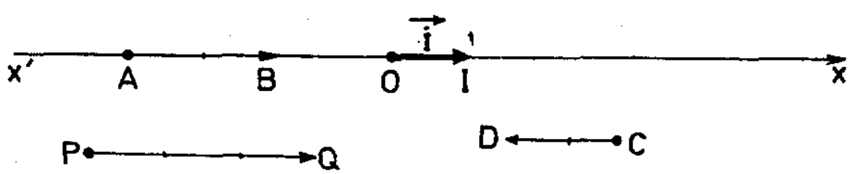
۵ ـ اندازهٔ جبری بردار روی یك محور ـ محور $x'x$ و بردار $\overrightarrow{AB}$ را که با $x'x$ هم‌راستاست (یعنی با $x'x$ موازی و یا برآن منطبق است) درنظر می‌گیریم.

تعریف ـ اندازهٔ جبری بردار $\overrightarrow{AB}$ که با محور $x'x$ هم‌راستاست عددی است حقیقی‌که قدر مطلق آن طول پاره خط AB و علامت آن مثبت یا منفی است برحسب آن‌که بردار $\overrightarrow{AB}$ با محور $x'x$ دارای یك جهت و یا درخلاف جهت یکدیگر باشند.

اندازهٔ جبری بردار $\overrightarrow{AB}$ را با علامت $\overline{AB}$ نشان می‌دهند.

مثلاً در شکل ۹ داریم:

$$\overline{CD} = -\frac{۳}{۲} \quad و \quad \overline{PQ} = +۳ \quad و \quad \overline{AB} = +۲$$



(شکل ۹)

به‌خصوص همواره می‌توان نوشت: $\overline{AB} = -\overline{BA}$ و یا $\overline{AB} + \overline{BA} = ۰$

توجه‌کنید ـ سه‌علامت قراردادی AB و $\overrightarrow{AB}$ و $\overline{AB}$ را نباید با هم اشتباه کرد:

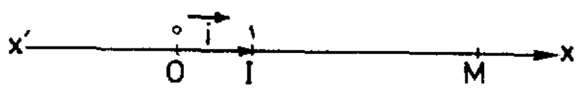
AB یا BA یعنی طول‌پاره خط AB (عدد حقیقی مثبت) ـ گاهی برای آن‌که اشتباه پیش نیاید طول بردار $\overrightarrow{AB}$ را با نماد $|\overrightarrow{AB}|$ نشان می‌دهند.

$\overrightarrow{AB}$ یعنی برداری که مبدأ آن A و منتهای آن B است (عنصر هندسی).

$\overline{AB}$ یعنی اندازهٔ جبری بردار $\overrightarrow{AB}$ نسبت به‌یك محور (عدد حقیقی مثبت یا منفی یاصفر).

تبصره ـ خاطر نشان می‌کنیم که درتعریف فوق لازم نیست که حتماً بردار روی محور واقع باشد. هربرداری که بامحور $x'x$ موازی باشدمی‌توان اندازهٔ جبری آن‌را مطابق باتعریف فوق روی آن محور معین کرد. مثلا درشکل ۹ بردار PQ با محور $x'x$ موازی است واندازهٔ جبری آن روی $x'x$ مساوی با ۳+ است.

۶ـ طول يك نقطهٔ متعلق به محور ـ اگر نقطه‌ای مانند M (شکل ۱۰) روی محور $x'Ox$ واقع باشد، عدد حقیقی $\overline{OM}$ یعنی اندازهٔ جبری $\overrightarrow{OM}$ را خفت یا طول نقطهٔ M می‌نامند.[1]



(شکل ۱۰)

بنابر اصلی که درشمارهٔ ۲ همین فصل پذیرفتیم هر نقطه ازمحور دارای يك و فقط يك‌طول است و هرعدد حقیقی طول يك وفقط يك نقطه از محور است.

به عبارت دیگر وضع هر نقطه از محور به‌وسیلهٔ طول آن مشخص می‌شود، پس اگر طول نقطهٔ A را a بنامیم می‌توانیم به‌جای آن که بگوییم «نقطهٔ A» بگوییم «عدد a» و بر عکس به‌جای آن‌که بگوییم «عدد a» می‌توانیم بگوییم «نقطهٔ A». به‌همین دلیل گاهی به‌جای آن‌که بگوییم «نقطهٔ به‌طول a» فقط می‌گوییم «نقطهٔ a».

گاهی طول نقطهٔ M را با نماد x_M می‌نمایانند.

اگر هم به‌نام نقطه احتیاج داشته باشیم و هم به‌طول‌آن برای آن‌که برسانیم که طول‌نقطهٔ A عدد a است می‌نویسم : $A(a)$.

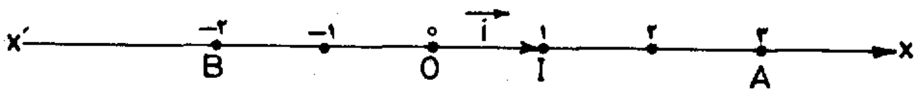
طول مبدأ صفر است و چون محور را افقی و جهت مثبت آن را از چپ به طرف راست فرض می‌کنیم، نقاطی که طول آنها مثبت است در سمت راست مبدأ و نقاطی که طولشان منفی است درسمت چپ مبدأ قرار دارند.

---

۱ ــ **توجه‌کنید:** نقطهٔ هندسی طول‌وعرض ندارد. این‌که‌دراینجا ازطول‌نقطهٔ M گفتگومی‌کنیم به‌اعتباراین‌است‌که M را متعلق به‌محور فرض‌کرده‌ایم و نظیر هرنقطه ازمحور يك عددحقیقی وجود دارد که آنرا اصطلاحاً طول‌آن‌نقطه می‌نامند. همچنین نبایداصطلاح «طول نقطه» را بااصطلاح «طول پاره خط» اشتباه‌کرد.

درشکل ۱۱ داریم :

$$x_A=\overline{OA}=+۳$$
$$x_B=\overline{OB}=-۲$$



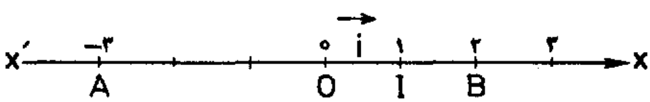
(شکل۱۱)

اگر طول نقطهٔ M متعلق به محور $x'x$ را x و بردار واحد محور را $\vec{i}$ بنامیم، می‌توان نوشت :

$$\overrightarrow{OM}=x\ .\vec{i}$$

۷- تغییرات‌طول یك نقطهٔ متحرك روی محور- وقتی نقطهٔ متحرکی مانند M محور $x'Ox$ را درجهت مثبت یعنی از x' به‌طرف x بپیماید ، طول آن یعنی $x=\overline{OM}$ همهٔ اعداد حقیقی را به‌ترتیب صعودی اختیار می‌کند.

برای روشن شدن مطلب دونقطهٔ $A(-۳)$ و $B(+۲)$ (شکل ۱۲) را روی محور $x'Ox$ درنظرمی‌گیریم وملاحظه می‌کنیم که :



(شکل ۱۲)

اگرنقطهٔ $M(x)$ درسمت چپ نقطهٔ A باشد ، داریم: $x<-۳$
« « « برنقطهٔ A منطبق « « $x=-۳$
« « « بین نقاط A وB « « $-۳<x<۲$
« « « برنقطهٔ B منطبق « « $x=۲$
« « « درسمت‌راست‌نقطهٔB « « $x>۲$

می‌بینیم که تناظریك به یکی که‌بین مجموعهٔ نقاط محور $x'Ox$ ومجموعهٔ اعدادحقیقی(R) موجود است و اگر $a>b$ نقطهٔ $A(a)$ در طرف راست نقطهٔ $B(b)$ واقع است و اگر $a<b$ نقطهٔ $A(a)$ درطرف چپ نقطهٔ $B(b)$ قرار دارد .

مثلا از $-۵<-۳$ نتیجه می‌شود که نقطهٔ (-۵) در سمت چپ نقطهٔ (-۳) واقع است .

۸ - معنی‌قراردادی دونماد $+\infty$ و $-\infty$ - وقتی نقطهٔ $M(x)$ که محور $x'x$

را می‌پیماید ازنقطهٔ O یعنی مبدأ دورشود، قدرمطلق طول‌آن رفته رفته بی‌اندازه بزرگ می‌شود و از هرعدد مثبت معلومی بزرگتر می‌گردد. دراین صورت می‌گویند که x به سمت بی‌نهایت میل‌می‌کند. بی‌نهایت را باعلامت ∞ می‌نمایانند.

اگر M درجهت مثبت محور دور شود ، می‌نویسند : $x \to +\infty$

واگر M درجهت منفی محور دور شود، می‌نویسند: $x \to -\infty$

توجه‌کنید (واین مطلب بسیار مهم است)که علامت ∞ نام‌یك عدد حقیقی معین (هرقدر هم‌که بزرگ فرض شود) نیست. بلکه مقصود از این‌که می‌نویسیم $x \to \infty$ این است که قدر مطلق x از هرعدد حقیقی بزرگی بزرگتر است.

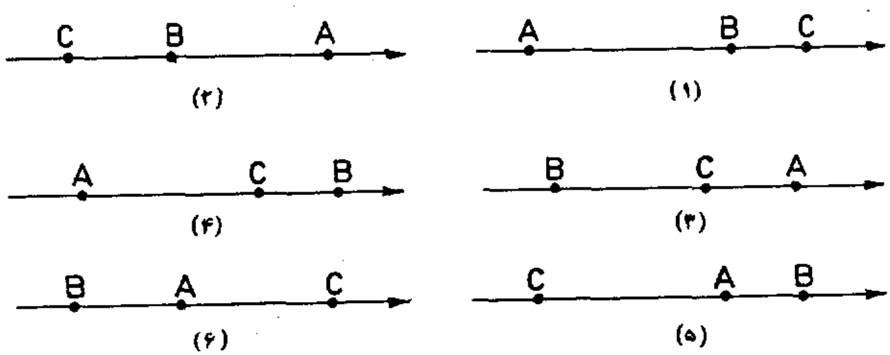
باتوجه به نکتهٔ فوق‌گاهی به جای آن که بنویسند $x \to \infty$ می‌نویسند $x = \infty$ دراین صورت باید متوجه بودکه علامت = به جای علامت $\to$ به‌کار رفته است .

۹ـ رابطهٔ شال (Chasles) **ـ اندازهٔ جبری مجموع هندسی دو بردار متوالی واقع بریك محور مساوی است بامجموع اندازه‌های جبری آن دو بردار.**

به عبارت دیگر: اگرنقاط A و B و C روی یك محور واقع باشند ، از تساوی برداری $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ تساوی جبری $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ نتیجه می‌شود.

رابطهٔ جبری $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ به رابطهٔ شال معروف است .

برهان ـ برحسب اوضاع نسبی نقاط A و B و C روی محور شش حالت ممکن است رخ دهد (چرا ؟)



(شکل ۱۳)

در حالت (۱) واضح است‌که $AB + BC = AC$

وچون اعداد $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ و $\overline{AC}$ هرسه مثبت هستند پس می‌توان نوشت :

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$$

همچنین مثلا در حالت (۵) داریم : $CB = CA + AB$

وچون دو بردار $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{CB}$ متقابل یکدیگرند همچنین $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{CA}$ متقابل هم هستند .

پس $\overline{CB}=-\overline{BC}$ و $\overline{CA}=-\overline{AC}$ لذا $-\overline{BC}=-\overline{AC}+\overline{AB}$

$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$$

تمرین ـ صحت رابطهٔ شال را درهریك ازحالات دیگرشکل ۱۳ تحقیق کنید.

۱۰ـ چگونگی نوشتن رابطهٔ شال برای سه نقطه ـ اگرسه نقطهٔ M و N و P روی یك محور واقع باشند ، مثلا برای نوشتن اندازهٔ جبری $\overline{MP}$ کافی است نقطهٔ N را بین M و P قرار دهیم وبنویسیم :

$$\overline{MP}=\overline{MN}+\overline{NP}$$

تمرین ـ به فرض آن که M و N و P روی‌یك‌محور واقع‌باشند هریك ازمقادیر $\overline{PM}$ و $\overline{MN}$ و $\overline{NM}$ و $\overline{NP}$ و $\overline{PN}$ را مطابق با رابطهٔ شال بنویسید .

۱۱ـ تبصره ـ رابطهٔ شال را در مورد سه نقطهٔ A و B و C از یك محور مـی‌توان به شکل زیرنوشت :

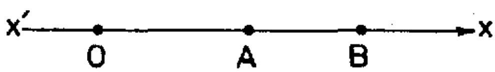
$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0$$

زیرا بنا به‌رابطهٔ شال داریم $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ اما $\overline{AC}=-\overline{CA}$ پس :

$$\overline{AB}+\overline{BC}=-\overline{CA} \quad \text{ویا} \quad \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0$$

۱۲ـ قضیهٔ اصلی ـ اندازهٔ جبری برداری‌که بریك محور واقع باشد مساوی است باطول منتهای آن منهای طول مبدأ آن .

برهان ـ دونقطهٔ A و B (شکل ۱۴) راروی محوری‌که مبدأآن‌نقطهٔ O است می‌گیریم و رابطهٔ شال را در مورد سه نقطهٔ A و B و O می‌نویسیم (مثلا A را بین O و B قرار می‌دهیم) :



(شکل ۱۴)

$$\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB}$$

ویا

$$\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$$

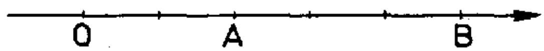
اگر طول نقاط A و B را روی محور به ترتیب a و b بنامیم یعنی $\overline{OA}=a$ و $\overline{OB}=b$ رابطهٔ فوق به صورت زیر در می‌آید :

$$\boxed{\overline{AB}=b-a}$$

وقضیه ثابت است .

مثال ـ درشکل ۱۵ داریم: $a=+۲$ و $b=+۵$ پس :

$$\overline{AB}=(+۵)-(+۲)=+۳$$



(شکل ۱۵)

همچنین درشکل ۱۶ داریم : $\overline{OC}=+۳$ و $\overline{OD}=-۲$ پس:

$$\overline{CD}=\overline{OD}-\overline{OC}=(-۲)-(+۳)=-۵$$



(شکل ۱۶)

III ـ نتایج قضیهٔ اصلی (شمارهٔ ۱۲)

۱۳ـ اندازهٔ فاصلهٔ دونقطه واقع بریك محور ـ دیدیم‌که اگر $A(a)$ و $B(b)$ بریك محور واقع باشند داریم:

$$\overline{AB}=b-a$$

پس طول‌پاره خط AB یعنی فاصلهٔ دونقطهٔ A و B عبارت است از :

$$|b-a|$$

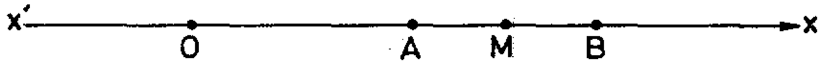
مثلا درشکل ۱۵ داریم: $AB=۳$

ودرشکل ۱۶ داریم: $CD=|\overline{CD}|=|-۵|=۵$

۱۴ـ طول نقطهٔ وسط یك پاره‌خط ـ اگر طولهای دو سر یك پاره‌خط واقع بر محور معلوم باشند، می‌توان طول نقطهٔ وسط آن پاره‌خط را برحسب آنها حساب‌کرد.

نقطهٔ وسط پاره‌خط AB (شکل ۱۷) راکه برمحور $x'x$ واقع است M می‌نامیم. واضح است‌که اندازه‌های جبری $\overline{AM}$ و $\overline{MB}$ با هم مساویند یعنی داریم :

$$\overline{AM}=\overline{MB}$$



(شکل ۱۷)

و نظر به‌قضیهٔ اصلی (شمارهٔ ۱۲) می‌توان نوشت :

$$\overline{OM}-\overline{OA}=\overline{OB}-\overline{OM}$$

و ازآنجا

$$\overline{OM}=\frac{\overline{OA}+\overline{OB}}{۲}$$

اگر طولهای نقاط A و B را به‌ترتیب a و b بنامیم، حاصل می‌شود:

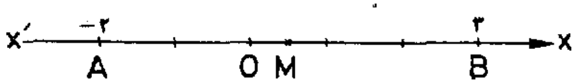
$$\boxed{x_M=\overline{OM}=\frac{a+b}{۲}}$$

یعنی : طول وسط یك پاره‌خط واقع بر محور مساوی است با نصف مجموع طولهای دو سر آن پاره‌خط .

مثال

درشکل ۱۸ که نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB فرض می‌شود، داریم:

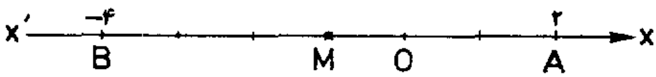
$\overline{OA}=-۲$ و $\overline{OB}=۳$ پس : $x_M=\overline{OM}=\frac{۳-۲}{۲}=\frac{۱}{۲}$



(شکل ۱۸)

همچنین درشکل ۱۹ اگر M وسط AB باشد داریم :

$\overline{OA}=۲$ و $\overline{OB}=-۴$ پس : $x_M=\overline{OM}=\frac{۲-۴}{۲}=-۱$



(شکل ۱۹)

تمرین

۱ ـ به‌فرض آن‌که A و B و C سه‌نقطه از محور x′x و O مبدأ این محور باشد ، با ترسیم شکل صحت تساویهای زیر را درهریك از حالات الف و ب و ج تحقیق کنید:

$\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}\ ,\ \overline{AC}=\overline{OC}-\overline{OA}\ ,\ \overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$

(الف) : $\overline{OC}=۷\ ,\ \overline{OB}=-۳\ ,\ \overline{OA}=۴$

(ب) : $\overline{OC}=-۶\ ,\ \overline{OB}=۴\ ,\ \overline{OA}=-۲$

(ج) : $\overline{OC}=-۷\ ,\ \overline{OB}=-۲\ ,\ \overline{OA}=۳$

۲ ـ به‌فرض آن‌که M و N و P سه نقطه از یك محور باشند، در هریك از حالات زیر اندازهٔ جبری هریك از بردارهای $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{NP}$ و $\overrightarrow{PM}$ را حساب‌کنید:

(الف) : $\overline{OP}=+۳\ ,\ \overline{ON}=-۲\ ,\ \overline{OM}=۲$

(ب): $\overline{OM}=۷$ ، $\overline{ON}=۵$ ، $\overline{OP}=-۳$

(ج): $\overline{OM}=-۴$ ، $\overline{ON}=-۳$ ، $\overline{OP}=-۲$

۳ ـ در هر یك از حالات زیر طول نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB را که بر محور x'Ox واقع است حساب‌کنید :

(الف): $\overline{OA}=۳$ ، $\overline{OB}=-۶$

(ب): $\overline{OA}=-۵$ ، $\overline{OB}=\sqrt{۲}$

(ج): $\overline{OA}=\frac{۳}{۲}$ ، $\overline{OB}=-\frac{۲}{۳}$

۴ ـ چهار نقطهٔ A و B و C و D روی یك محور واقع هستند . آیا همهٔ رابطه‌های زیر صحیح هستند :

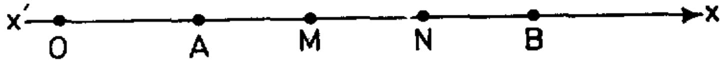
$$\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CD}+\overline{DB}$$
$$\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{DC}+\overline{CB}$$
$$\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CD}+\overline{DB}$$
$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BD}+\overline{DC}$$
$$\overline{AC}=\overline{AD}+\overline{DB}+\overline{BC}$$

هر یك از تساویهای فوق مطابق با چه قاعده‌ای نوشته شده است؟

۵ ـ روی محور x'Ox دونقطهٔ A و B را به‌طولهای $\overline{OA}=a$ و $\overline{OB}=b$ اختیارکرده طول هر یك از نقاطی را که پاره‌خط AB را به سه قسمت متساوی تقسیم می‌کنند حساب کنید.

راهنمایی ـ نقاط مذکور را مطابق با شکل ۲۰، M و N بنامید وملاحظه‌کنید که

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=-\frac{۱}{۲} \quad و \quad \frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}=-۲ \quad و\ مثلا \quad \overline{MA}=a-x_M$$



(شکل ۲۰)

۶ ـ روی محور $x'Ox$ نقاط A و B را به‌طولهای $\overline{OA}=۳$ و $\overline{OB}=-۴$ اختیارکرده طول هریك از نقاطی را که پاره خط AB به‌وسیلهٔ آنها به‌چهار قسمت متساوی تقسیم می‌شود حساب کنید .

۷ ـ روی‌محور $x'Ox$ دو نقطهٔ A و B را به‌ترتیب به‌طولهای a و b اختیارکرده نقطهٔ M را روی محور چنان مشخص‌کنیدکه رابطهٔ : $\overline{MA}=k\times\overline{MB}$ برقرار باشد.

k عددی است حقیقی .

(درصورتی‌که $a=-۴$ و $b=۱۰$ و $k=-۲/۵$ باشد ، طول نقطهٔ M را حساب کنید) .

۸ ـ چهار نقطهٔ A و B و C و D روی محوری واقع هستند و رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\overline{AC}\cdot\overline{BD}+\overline{AD}\cdot\overline{BC}=۰$$

تحقیق‌کنیدکه طولهای این چهارنقطه که آنها را به‌ترتیب a و b و c و d می‌نامیم در رابطهٔ زیر صادق هستند:

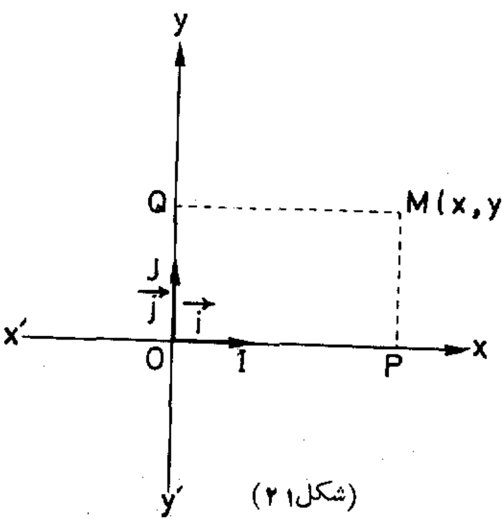
$$(a+b)(c+d)=۲(ab+cd)$$

۹ ـ سه‌نقطهٔ A و B و C روی محور $x'Ox$ واقع‌هستند. تحقیق‌کنیدکه رابطهٔ زیردرست است :

$$\overline{OA}\times\overline{BC}+\overline{OB}\times\overline{CA}+\overline{OC}\times\overline{AB}=۰$$

IV ـ دستگاه مختصات دکارتی[1]

۱۵ ـ محورهای مختصاتـ دریك صفحه دومحور $x'Ox$ و $y'Oy$ (شکل۲۱) را عمود برهم رسم کرده نقطهٔ O فصل مشترك آنهارا مبدأ مشترك هردومحور اختیارمی‌کنیم و بردار واحد محور $x'x$ را $\vec{i}$ و بردار واحد محور $y'y$ را $\vec{j}$ می‌نامیم.

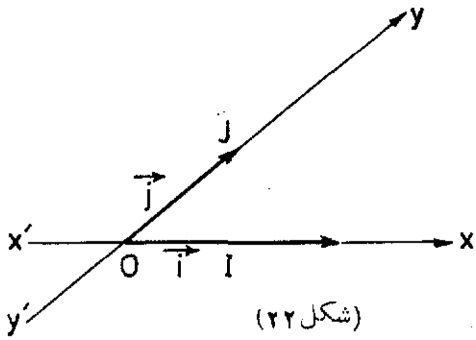


(شکل۲۱)

---

۱ ـ مشتق از نام دکارت (Descartes) فیلسوف وریاضی‌دان ودانشمند فرانسوی که از ۱۵۹۶ تا ۱۶۵۰ میلادی می‌زیست.

شکلی را که به‌این طریق حاصل می‌شود دستگاه مختصات دکارتی می‌نامند و وضع هر نقطه از صفحهٔ xOy را چنان‌که خواهیم دید نسبت به این محورها معین می‌کنند. صفحهٔ xOy صفحهٔ مختصات نامیده می‌شود.



(شکل ۲۲)

ممکن است محورهای مختصات بر هم عمود نباشند. همچنین لازم نیست که طول بردارهای واحد $\vec{i}$ و $\vec{j}$ یکی باشد، بلکه می‌توان روی هر محور واحد مستقلی برای طول اختیار کرد (شکل ۲۲).

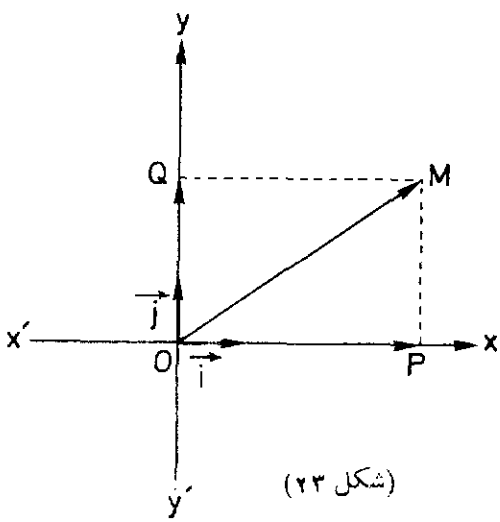
توجه کنید ـ در این کتاب ما همواره محورهای مختصات را عمود برهم می‌گیریم و روی هر دو محور یك واحد مشترك برای اندازه‌گیری طولها اختیار می‌کنیم.

توجه به‌مطلب فوق مهم است، زیرا بعضی از دستورهایی که بعداً به‌دست خواهیم آورد فقط درصورتی درست خواهند بودکه شرایط فوق برقرار باشد.

بنابراین، از این به‌بعد هرجا از محورهای مختصات گفتگو کنیم بدون آن‌که احتیاج به تذکار باشد قبول می‌کنیم‌که: $\widehat{xOy} = 90°$ و $|\vec{i}| = |\vec{j}|$ مگر در صورتی که خلاف این امر را به‌صراحت تذکر دهیم.

۱۶ــ مختصات یك نقطه ازصفحه ـ نقطهٔ M را در صفحهٔ مختصات xOy (شکل ۲۳) اختیارکرده از آن عمودهای MP و MQ را به‌ترتیب برمحورهای $x'Ox$ و $y'Oy$ فرود می‌آوریم.

اندازهٔ جبری بردار $\overrightarrow{OP}$ را روی‌محور $x'x$ **طول نقطهٔ M** و اندازهٔ جبری بردار $\overrightarrow{OQ}$ را روی محور $y'y$ **عرض نقطهٔ M** می‌نامند.



(شکل ۲۳)

طول نقطه را معمولا با حرف x نشان می‌دهند $x_M = x = \overline{OP}$ وعرض نقطه رامعمولا باحرف y می‌نمایانند $y_M = y = \overline{OQ}$.

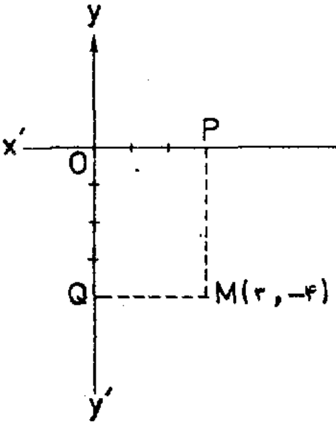
گاهی نیز طول نقطه را ایکسِ نقطه و عرض آن‌را ایگرکِ نقطه می‌نامند.

نقطهٔ O مبدأ مختصات و محور $x'x$ محور طولها (یا محور xها) و محور $y'y$ محور

عرضها (یا محور yها) نامیده می‌شوند. طول و عرض هرنقطه را مختصات آن نقطه می‌نامند:

$$\left\{\begin{array}{l} x=\overline{OP}=M \text{ طول نقطهٔ } \\ y=\overline{OQ}=M \text{ عرض نقطهٔ } \end{array}\right. \quad : \text{ مختصات } M \text{ (درشکل ۲۳)}$$

اگر بخواهند مثلانقطهٔ M راکه طول آن ۳ وعرض آن ۴− است نام ببرند، می‌گویند: «نقطهٔ M به‌مختصات ۳ و ۴−» و در موقع نوشتن چنین می‌نویسند: (۴−, ۳)M ، وگاهی نیز چنین می‌نویسند $M\left|\begin{array}{l}۳\\-۴\end{array}\right.$

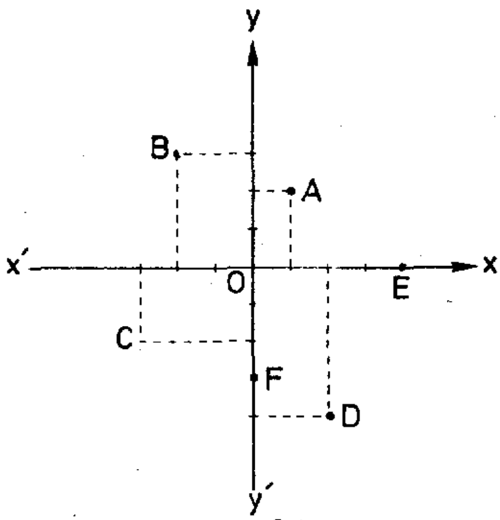


(شکل ۲۴)

به‌طورکلی نقطهٔ (x,y) یعنی نقطه‌ای که طول آن x و عرض آن y است . بنابراین مختصات هر نقطه از صفحه به صورت یك جفت مرتب از اعداد حقیقی نوشته می‌شود که عضو سمت چپ آن طول نقطه و عضو سمت‌راست آن عرض نقطه است .

نقطهٔ (۴−, ۳) یعنی نقطه‌ای که طولش ۳ وعرضش ۴− است (شکل ۲۴).

۱۷ـ یافتن نقطه‌ای که مختصاتش معلوم است ـ اگر مختصات یك نقطه یعنی طول آن x وعرض آن y معلوم باشد، برای یافتن آن نقطه، درصفحهٔ مختصات ، روی محور x′x نقطهٔ P را به طول $\overline{OP}=x$ و روی محور y′y نقطهٔ Q را به عرض $\overline{OQ}=y$ معین کرده از نقاط P و Q دو عمود به‌ترتیب بر x′x و y′y اخراج می‌کنیم تا یکدیگر را درنقطهٔ مطلوب قطع کنند . بنابراین نظیر هرجفت مرتب از اعداد حقیقی مانند جفت مرتب (x,y) یك نقطه از صفحهٔ مختصات به‌دست می‌آید.



(شکل ۲۵)

مثال ـ درشکل ۲۵ نقاط زیر نشان داده شده‌اند :

B(−۲,۳) , A(۱,۲)

D(۲,−۴) , C(−۳,−۲)

F(۰,−۳) , E(۴,۰)

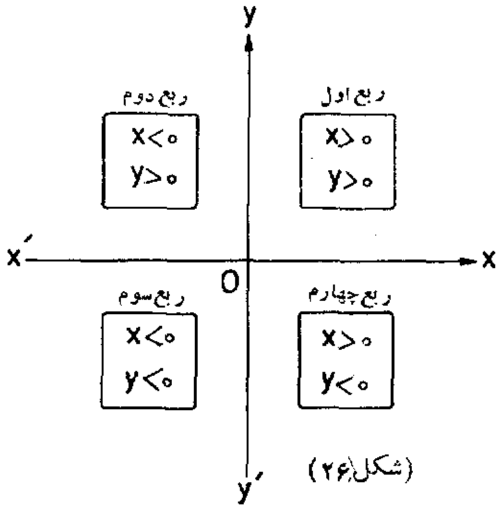
۱۸ـ تبصره ـ مختصات مبدأ O عبارتند از x = ۰ و y = ۰ .

هرنقطه که روی محور x′x واقع باشد، عرضش صفر است وبرعکس هرنقطه که عرضش

صفر باشد، روی محور $x'x$ قرار دارد.

هر نقطه که روی محور $y'y$ واقع باشد، طولش صفر است و برعکس هر نقطه که طولش صفر باشد، روی محور $y'y$ قراردارد.

محورهای مختصات صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هریك از آنها را يك ربع می‌نامند (شکل ۲۶). نقطه‌ای که در یکی ازاین چهار ربع واقع باشد، هر یك از مختصاتش دارای علامت مشخصی هستند:



(شکل ۲۶)

هر نقطه که در ربع اول واقع باشد، طول وعرض آن هر دو مثبت هستند

هر نقطه که در ربع دوم واقع باشد، طولش منفی وعرضش مثبت است.

هر نقطه که در ربع سوم واقع باشد، طول وعرضش هردو منفی هستند.

هر نقطه که در ربع چهارم واقع باشد، طولش مثبت و عرضش منفی است.

به‌طور خلاصه:

محل نقطه	علامت طول	علامت عرض
ربع اول	+	+
ربع دوم	−	+
ربع سوم	−	−
ربع چهارم	+	−

۱۹- تناظر يك به يك بين مجموعهٔ نقاط صفحه و مجموعهٔ جفتهای مرتب اعداد حقیقی

از آنچه گذشت نتیجه می‌شود که:

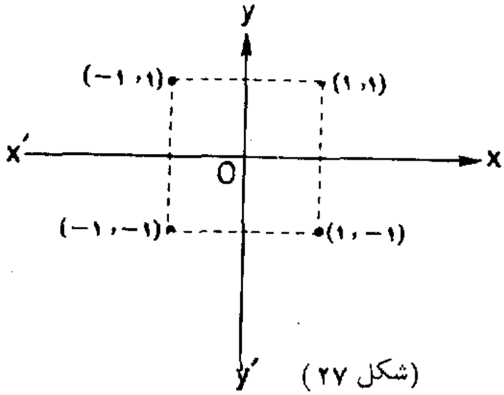
اولا نظیر هر نقطه مانند M از صفحهٔ مختصات يك وفقط يك جفت مرتب (a,b) ازاعداد حقیقی می‌توان یافت به‌قسمی که a طول آن و b عرض آن باشد (چگونه؟).

ثانیاً نظیر هرجفت مرتب (a,b) از اعداد حقیقی يك و فقط يك نقطه مانند M در صفحهٔ مختصات می‌توان یافت که طول آن a و عرض آن b باشد (چگونه؟).

بنابراین همان‌گونه که بین مجموعهٔ نقاط يك محور و مجموعهٔ اعداد حقیقی يك تناظر يك به‌يك موجود است:

بین مجموعهٔ نقاط صفحهٔ مختصات و مجموعهٔ جفتهای مرتب اعداد حقیقی نیز یك تناظر یك به یك وجود دارد.

به‌همین دلیل است که به‌جای‌آن که بگوییم: «نقطه‌ای که طول آن a وعرض آن b است» می‌گوییم : نقطهٔ (a,b) .



(شکل ۲۷)

۲۰ـ نمودارهندسی مجموعه‌ای از جفتهای مرتب ـ اگر مجموعه‌ای از جفتهای مرتب اعداد حقیقی داشته باشیم و نقاط نظیر آنهارا درصفحهٔ مختصات معین کنیم، شکل حاصل‌را نمودار هندسی یا به‌طور خلاصه نمودار آن مجموعه می‌نامند.

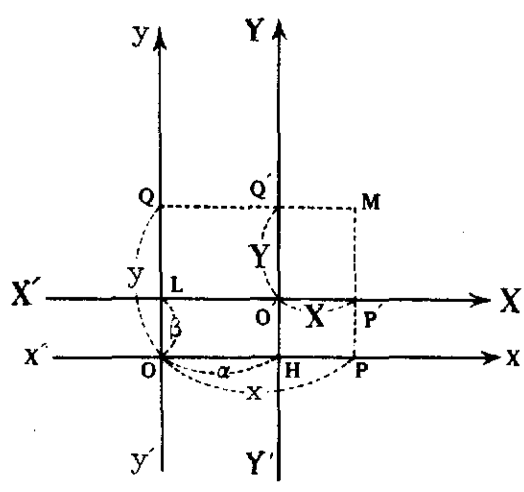
مثال ـ نمودار :

$$\{(-۱,۱) \ , \ (-۱,-۱) \ , \ (۱,-۱) \ , \ (۱,۱)\}$$

که اعضای آن چهار جفت مرتب است چهار رأس یك مربع است که در شکل ۲۷ نشان داده شده است.

۲۱ـ تغییر مبدأ مختصات ـ انتقال محورهای مختصات ـ در صفحهٔ دو محور مختصات $x'Ox$ و $y'Oy$ (شکل ۲۸) نقطهٔ $O' \left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right.$ ، $(\overline{OH}=\alpha$ و $\overline{OL}=\beta)$ ، رادرنظر گرفته ازاین‌نقطه دو محور $X'X$ و $Y'Y$ را بترتیب موازی ومتحدالجهت با محورهای $x'x$ و $y'y$ رسم می‌کنیم .

اگر محورهای $x'x$ و $y'y$ را با حفظ امتداد وجهتشان حرکت دهیم تا بترتیب بر محورهای $X'X$ و $Y'Y$ منطبق شوند و بالنتیجه نقطهٔ O' مبدأ جدید مختصات اختیار شود ، می‌گویند محورهای مختصات انتقال یافته‌اند .



(شکل ۲۸)

هرگاه مختصات نقطه‌ای مانند M نسبت به محورهای $x'x$ و $y'y$ بترتیب $\overline{OP}=x$ و $\overline{OQ}=y$ و مختصات همان نقطه نسبت به محورهای $X'X$ و $Y'Y$ بترتیب $\overline{O'P'}=X$ و $\overline{O'Q'}=Y$ باشند، برای تعیین رابطهٔ بین x و y با X و Y ملاحظه می‌کنیم که :

$$\overline{OP}=\overline{OH}+\overline{HP}=\overline{OH}+\overline{O'P'}$$

و

$$\overline{OQ}=\overline{OL}+\overline{LQ}=\overline{OL}+\overline{O'Q'}$$

پس

$$x=\alpha+X$$

و

$$y=\beta+Y$$

و از آنجا

$$\boxed{\begin{matrix} X=x-\alpha \\ Y=y-\beta \end{matrix}}$$

یعنی طول هر نقطه در دستگاه جدید برابر است با طول همان نقطه در دستگاه قدیم منهای طول مبدأ جدید .

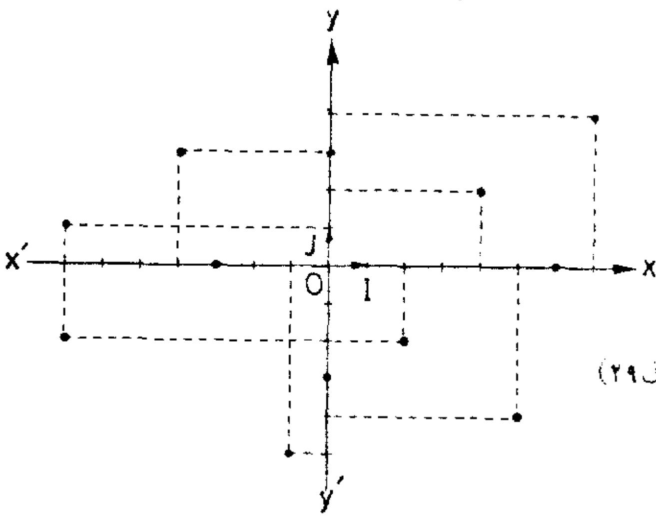
عرض هر نقطه در دستگاه جدید برابر است با عرض همان نقطه در دستگاه قدیم منهای عرض مبدأ جدید .

تمرین

۱ ـ جای هریک ازنقاط زیر را درصفحهٔ مختصات معین کنید:

$$(-۴,۰)\ ,\ (۰,-۵)\ ,\ (-۳,۱)\ ,\ (۲,-۲),$$
$$(۰,۲/۷)\ ,\ (۳,۲)\ ,\ (۳/۵,۲)\ ,\ (-۲,-\frac{۵}{۲})$$

۲ ـ مختصات هریک ازنقاطی راکه درشکل ۲۹ معین شده تعیین‌کنید:



(شکل ۲۹)

۳ ـ بدون رسم کردن شکل معین کنید که هر یك از نقاط زیر در کدام ربع از صفحهٔ مختصات یا روی کدام محور واقع شده است:

$$(۴,۶)\ ,\ (-۳,-۷)\ ,\ (۲,-۴)\ ,\ (-۱,۲),$$
$$(۰,۰)\ ,\ (۷,-۱۸)\ ,\ (۳,۰)\ ,\ (۰,-۲)$$

۴ ـ نمودار هندسی مجموعهٔ زیر را معین کنید:

$$\{(۲,۲)\ ,\ (۲,-۲)\ ,\ (-۱,۰)\}$$

۵ ـ به‌فرض آن‌که Z مجموعهٔ عددهای صحیح نسبی باشد، نمودار مجموعهٔ زیر را رسم کنید .

$$\{(x,۱)\mid x\in Z\}$$

۶ ـ نمودار مجموعهٔ زیر را رسم کنید:

$$\{(x\,,\frac{۴}{x})\mid x=۱ \text{ یا } ۲ \text{ یا } ۳ \text{ یا } ۴\}$$

۷ ـ مختصات A در دستگاه xOy بترتیب ۲ و ۳ و در دستگاه $xO'y$ که محورهای آن موازی و هم جهت با دو محور دستگاه اول می‌باشد ، بترتیب ۲ ـ و ۵ است ، مطلوب است مختصات O' .

۸ ـ نقاط $A\begin{vmatrix}۱\\۲\end{vmatrix}$ و $B\begin{vmatrix}۳\\۴\end{vmatrix}$ در دستگاه xOy مفروضند . اگر محورهای مختصات را تا نقطهٔ C ، وسط AB ، انتقال دهیم مختصات A و B را نسبت به دستگاه جدید حساب کنید .

۹ ـ به‌فرض آن‌که x و y عددهای حقیقی باشند، نمودار هریك از مجموعه‌های زیررا رسم کنید :

$$M=\{(x,y)\mid x\geqslant ۰\ \ ,\ \ y=۱\}$$
$$N=\{(x,y)\mid x=۲\ \ y<۰\}$$

۱۰ ـ آیا دونقطهٔ $A(۲,۳)$ و $B(۲,-۳)$ نسبت به‌محور $x'x$ قرینهٔ یکدیگرند ؟ ـ در چه صورت دونقطه که مختصاتشان معلوم است نسبت به‌محور $x'x$ قرینهٔ یکدیگرند؟

۱۱ ـ آیا دونقطهٔ $C(-۱,۵)$ و $D(۱,۵)$ نسبت به‌محور yها قرینهٔ یکدیگرند؟ ـ در چه صورت دونقطه که مختصاتشان معلوم است نسبت به‌محور $y'y$ قرینهٔ یکدیگرند؟

۱۲ ـ آیا دونقطهٔ $E(۱,۲)$ و $F(-۱,-۲)$ نسبت به‌مبدأ مختصات قرینهٔ یکدیگرند؟

۱۳ ـ مجموعهٔ نقاطی از صفحهٔ مختصات را تعیین کنید که اگر نقطهٔ (x,y) متعلق به‌آن مجموعه باشد، یکی از شرایط زیر برقرار باشد :

(الف) $x=۲$ (ب) $y=-۳$

(ج) $x>۲$ (د) $x\geqslant ۳$

(ه) $y>4$ (و) $y\geqslant -2$

(ز) $y<4$ (ح) $y<-1$

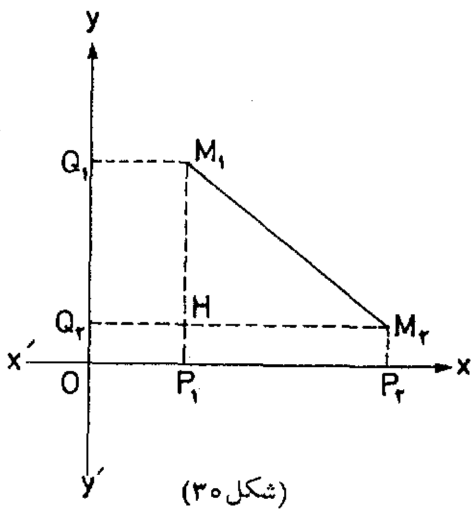
۱۴ ـ نقطهٔ $M(x,y)$ درکدام ناحیه از صفحهٔ مختصات واقع باشد تا یکی از شرایط زیر برقرار باشد :

(الف) $\begin{cases}x>2\\y>3\end{cases}$ (ب) $\begin{cases}x>2\\y<4\end{cases}$

(ج) $\begin{cases}x<-2\\y>3\end{cases}$ (د) $\begin{cases}x<3\\y<-1\end{cases}$

۷ ـ حل چند مسئله

۲۲ـ محاسبهٔ فاصلهٔ دونقطه برحسب مختصات آنها ـ دو نقطهٔ $M_1(x_1 , y_1)$ و $M_2(x_2 , y_2)$ (شکل ۳۵) را در صفحهٔ مختصات xOy درنظر گرفته می‌خواهیم فاصلهٔ این دو نقطه یعنی طول پاره‌خط M_1M_2 را برحسب مختصات نقاط M_1 و M_2 حساب کنیم .



(شکل ۳۵)

حل ـ از دونقطهٔ M_1 و M_2 خطوطی عمود بر دومحور رسم کرده فصل مشترك M_1P_1 را با M_2Q_2 نقطهٔ H می‌نامیم، واضح است که:

$\overline{OP_1}=x_1$ و $\overline{OP_2}=x_2$ و $\overline{OQ_1}=y_1$ و $\overline{OQ_2}=y_2$ و $\overline{HM_2}=\overline{P_1P_2}$ و $\overline{HM_1}=\overline{Q_2Q_1}$

و بنابرقضیهٔ اصلی شمارهٔ ۱۲ همین فصل داریم :

$$\overline{HM_2}=\overline{P_1P_2}=\overline{OP_2}-\overline{OP_1}=x_2-x_1$$
$$\overline{HM_1}=\overline{Q_2Q_1}=\overline{OQ_1}-\overline{OQ_2}=y_1-y_2$$

اما مثلث HM_1M_2 قائم‌الزاویه است ونظر به‌قضیهٔ فیثاغورس داریم :

$$\overline{M_1M_2}^2=\overline{HM_1}^2+\overline{HM_2}^2$$

و از آنجا :

$$\overline{M_1M_2}^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$$

ویا :

$$\boxed{M_1M_2=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}}$$

اگر دونقطهٔ مفروض مثلاً A و B باشند، دستور فوق را می‌توان چنین نوشت:

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}$$

توجه‌کنید ـ این دستورها فقط درصورتی صحیح هستند که محورهای مختصات عمودبرهم باشند و علاوه براین، واحد طول روی هردو محور یکی باشد.

مثال ۱ ـ محاسبهٔ فاصلهٔ دونقطهٔ $A(-۱,۳)$ و $B(۴,-۲)$.

$$AB=\sqrt{(-۱-۴)^۲+(۳+۲)^۲}=\sqrt{۲۵+۲۵}=\sqrt{۵۰}=۵\sqrt{۲}$$

مثال ۲ ـ محاسبهٔ فاصلهٔ مبدأ مختصات از نقطهٔ $M(a,b)$.

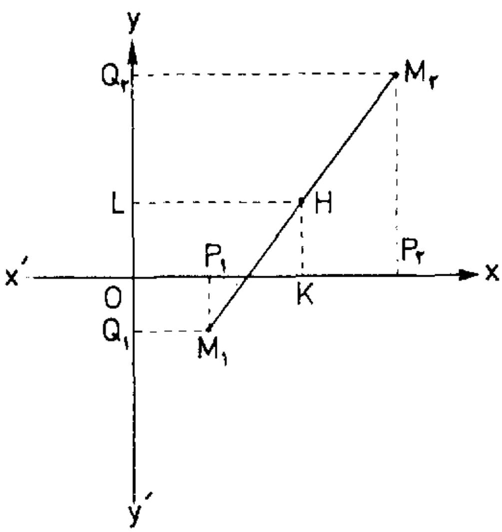
مختصات مبدأ عبارتند از $(۰,۰)$ و داریم:

$$OM=\sqrt{(۰-a)^۲+(۰-b)^۲}=\sqrt{a^۲+b^۲}$$

۲۳ـ محاسبهٔ مختصات وسط یك پاره‌خط برحسب مختصات دوسر آن

دو نقطهٔ $M_۱(x_۱,y_۱)$ و $M_۲(x_۲,y_۲)$ (شکل۳۱) را در صفحهٔ مختصات در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم مختصات نقطهٔ H وسط پاره‌خط $M_۱M_۲$ را برحسب مختصات نقاط $M_۱$ و $M_۲$ حساب‌کنیم.

حلـ ازنقاط $M_۱$ و H و $M_۲$ خطوطی عمود بر دو محور رسم می‌کنیم تا به‌ترتیب محور $x'x$ را در نقاط $P_۱$ و K و $P_۲$ و محور $y'y$ را درنقاط $Q_۱$ و L و $Q_۲$ قطع‌کنند. واضح است‌که نقطهٔ K وسط‌پاره‌خط $P_۱P_۲$ و نقطهٔ L وسط پاره‌خط $Q_۱Q_۲$ می‌باشد (مطابق با چه قضیه‌ای؟).



(شکل ۳۱)

بنابراین نظر به‌شمارهٔ ۱۴ همین فصل داریم:

$$\overline{OK}=P_۱P_۲\text{وسط} K \text{طول نقطهٔ}=\frac{\overline{OP_۱}+\overline{OP_۲}}{۲}=\frac{x_۱+x_۲}{۲}$$

همچنین:

$$\overline{OL}=Q_۱Q_۲\text{وسط} L\text{عرض نقطهٔ}=\frac{\overline{OQ_۱}+\overline{OQ_۲}}{۲}=\frac{y_۱+y_۲}{۲}$$

بنابراین:

طول وسط هر پاره‌خط مساوی است با نصف مجموع طولهای دو سر آن.
عرض وسط هر پاره‌خط مساوی است بانصف مجموع عرضهای دوسر آن.

اگر وسط پاره‌خط AB را نقطهٔ I بنامیم، مختصات I عبارتند از :

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{۲}$$

$$y_I = \frac{y_A + y_B}{۲}$$

مثال ـ محاسبهٔ مختصات نقطهٔ I وسط پاره‌خط AB که مختصات دو سر آن عبارتند از $A(-۱,-۷)$ و $B(۲,-۳)$.

مختصات نقطهٔ I وسط AB
$$\begin{cases} x_I = \frac{-۱+۲}{۲} = \frac{۱}{۲} \\ y_I = \frac{-۷-۳}{۲} = -۵ \end{cases}$$

تمرین

۱ ـ در هریك از حالات زیر طول پاره‌خط AB راحساب‌کنید :

(الف) : $A(۳,۷)$ و $B(-۲,۳)$

(ب) : $A(-۵,-۲)$ و $B(-۷,-۴)$

(ج) : $A(۳,۶)$ و $B(۲,۵)$

(د) : $A(-۶,-۱۳)$ و $B(۲,-۷)$

(ه) : $A(۵,۰)$ و $B(۰,۴)$

(و) : $A(۰,-۸)$ و $B(-۱۰,۲)$

۲ ـ مختصات وسط پاره‌خط AB را درهریك از حالات تمرین ۱ حساب‌کنید .

۳ ـ مختصات نقاط P و Q عبارتند از :

$$P(a\,,\,۲a) \quad , \quad Q(-۲a\,,\,a)$$

فاصلهٔ مبدأ مختصات را از وسط پاره‌خط PQ حساب‌کنید.

۴ ـ نقاط $A(۸,۶)$ و $B(-۳,۴)$ را درصفحهٔ مختصات xOy معین کرده طول پاره ـ خطهای OA و OB و AB را حساب‌کنید. آیا می‌توانید ثابت کنیدکه زاویهٔ O از مثلث OAB قائمه است؟ ـ فاصلهٔ مبدأ مختصات را از وسط پاره‌خط AB حساب‌کنید و تحقیق کنید که این فاصله نصف AB است.

۵ ـ چهارنقطهٔ $A(-۱,۳)$ و $B(۸,۶)$ و $C(۳,۱۱)$ و $D(-۶,۸)$ رادرصفحهٔ مختصات تعیین کرده تحقیق کنید که وسط پاره‌خط AC بر وسط پاره‌خط BD منطبق است . چهار ضلعی ABCD چه شکلی است؟

۶ ـ نقاط $(۰,۰)$ و $(۲,۴)$ و $(۶,۰)$ سه رأس یك متوازی‌الاضلاع هستند. مختصات رأس چهارم آن متوازی‌الاضلاع را حساب‌کنید (سه‌جواب).

۲ فصل

معادلهٔ خط راست
(ومسائل مربوط به آن)

I ـ معادلهٔ خط راست (تابع درجهٔ اول)

۱ ـ نمودار هندسی یك معادله ـ دیدیم که هر جفت مرتب از اعداد حقیقی مانند (a,b) مختصات یك نقطه مانند M ازصفحهٔ مختصات هستند. این نقطه را نمودارهندسی جفت مرتب (a,b) می‌نامند.

اکنون یك معادلهٔ دومجهولی $f(x,y)=0$ راکه درآن $f(x,y)$ عبارتی جبری برحسب **x و y و هردو ازدرجه اول است درنظر می‌گیریم . مانند :**

$$f(x,y)=2x+3y-12=0 \qquad (1)$$

اگر در این معادله به‌جای x یك عدد حقیقی قرار دهیم و معادله را برحسب y حل کنیم، یك عدد حقیقی برای y به‌دست می‌آید و نظیر جفت مرتب (x,y) یك نقطه مانند M درصفحهٔ مختصات xOy حاصل می‌شود.

اگر x را تغییردهیم، y نیزتغییر می‌کندونقطهٔ M نیز درصفحهٔ xOy تغییرمکان‌می‌دهد. پس بی‌نهایت نقطه می‌توان یافت که مختصات آنها درمعادلهٔ (۱) صدق کند. مجموعهٔ این نقاط نمودار هندسی معادلهٔ (۱) نامیده می‌شود. به‌طورکلی :

مجموعهٔ نقاط $M(x,y)$ راکه مختصاتشان درمعادلهٔ $f(x,y)=0$ صدق می‌کند نمودار هندسی این معادله می‌نامند.

چون عملا نمی‌توان بی‌نهایت مقدار مختلف به x نسبت داد معمولا به چند مقدار برای x اکتفاکرده مقادیر نظیرآنها را برای y حساب می‌کنند ونقاط حاصل را به‌هم وصل می‌کنندتا شکل تقریبی نمودار هندسی معادله به‌دست آید.

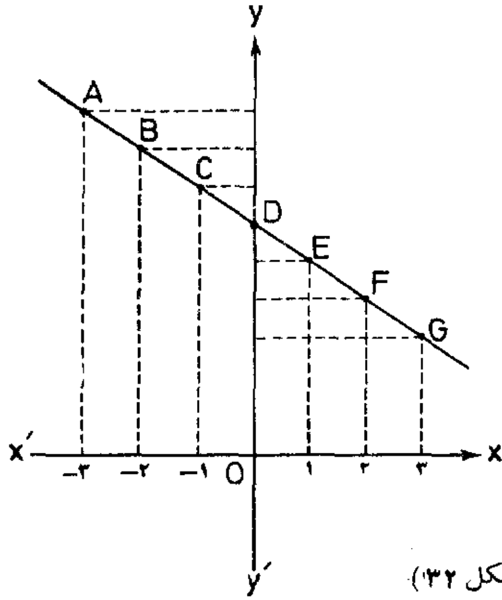
مثال ۱ ـ اگر درمعادلهٔ : $\quad 2x+3y-12=0 \qquad (1)$

به‌جای x مقادیر ۳ــ ، ۲ــ ، ۱ــ ، ۰ ، ۱ ، ۲ و ۳ را قرار دهیم ، برای y به‌ترتیب مقادیر ۶ ، $\frac{16}{3}$ ، $\frac{14}{3}$ ، ۴ ، $\frac{10}{3}$ ، $\frac{8}{3}$ و ۲ به‌دست می‌آیدو نقاط زیر حاصل می‌شود:

$A(-3,6)$ و $B(-2,\frac{16}{3})$ و $C(-1,\frac{14}{3})$ و $D(0,4)$ و

$$G(۳,۲) \text{ و } F(۲,\frac{۸}{۳}) \text{ و } E(۱,\frac{۱۰}{۳})$$

اگر این نقاط را همچنان‌که روی شکل ۳۲ دیده می‌شود به‌هم وصل کنیم ، قسمتی از نمودار هندسی معادلهٔ (۱) حاصل می‌شود. بعداً ثابت می‌کنیم که این نمودار هندسی یک خط راست است.

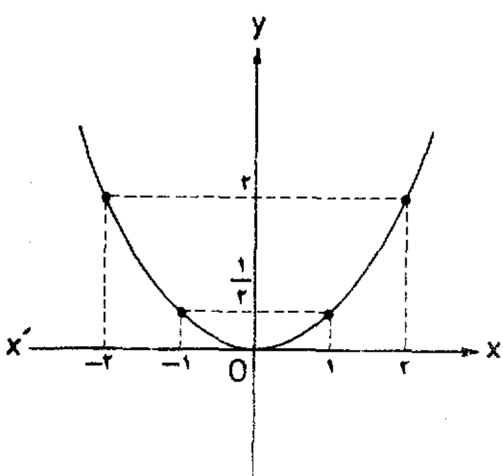


(شکل ۳۲)

مثال ۲ ـ شکل ۳۳ قسمتی از نمودار هندسی معادلهٔ $۲y - x^۲ = ۰$ را نشان می‌دهد . نقاطی‌که روی شکل به‌هم وصل شده‌اند نمودار جفتهای مرتب زیر هستند (این جفتها چگونه به‌دست آمده‌اند؟) :

$$(۰,۰) \text{ و } (۱,\frac{۱}{۲}) \text{ و } (۲,۲)$$

$$\text{و } (-۲,۲) \text{ و } (-۱,\frac{۱}{۲})$$



(شکل ۳۳)

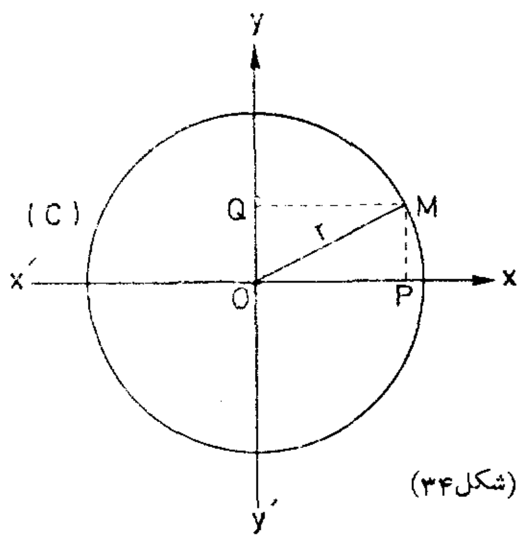
۲ـ معادلهٔ شکل حاصل ازیك مجموعهٔ نقاط ـ اگر مجموعه‌ای از نقاط واقع‌در صفحهٔ مختصات xOy دارای خاصیت مشترکی باشند و بتوانیم آن خاصیت را بوسیلهٔ رابطه‌ای به‌صورت :

$$f(x,y)=0 \qquad (۱)$$

بین مختصات آن نقاط بیان کنیم ، معادلهٔ (۱) را معادلهٔ شکل حاصل از آن مجموعهٔ نقاط می‌نامند. این شکل معمولا خطی است منحنی (یا راست) .

مثال ـ می‌دانیم‌که دایره مجموعه‌ای ازنقاط صفحه است که فاصلهٔ هریك از آنها از یك نقطهٔ معلوم صفحه موسوم به‌مرکز مقداری است ثابت.

اکنون‌درصفحهٔ مختصات xOy (شکل۳۴) دایرهٔ (C) را که‌مرکز آن‌نقطهٔ O مبدأ مختصات و شعاع آن r است درنظر گرفته ، نقطه‌ای مانند M روی آن اختیار می‌کنیم و مختصات M



(شکل۳۴)

را $\overline{OP}=\overline{QM}=x$ و $\overline{OQ}=\overline{PM}=y$ می‌نامیم. درمثلث قائم الزاویهٔ OPM داریم:

$$\overline{OM}^2=\overline{OP}^2+\overline{PM}^2$$

و یا

$$x^2+y^2=r^2 \qquad (۲)$$

پس هرنقطه‌که روی دایرهٔ (C) واقع باشد مختصات آن درمعادلهٔ (۲) صدق می‌کند.

اکنون فرض می‌کنیم‌که جفت مرتب (x_0,y_0) در معادلهٔ (۲) صادق باشد . این جفت مرتب مختصات نقطه‌ای است مانند M_0 به‌قسمی‌که

$$\overline{OM}_0^2=x_0^2+y_0^2$$

پس $OM_0^2=r^2$ و یا $OM_0=r$

یعنی نقطهٔ M_0 روی دایرهٔ (C) واقع است.

بنابراین معادلهٔ (۲) دارای دوخاصیت زیر است:

اولاً هرنقطه که روی دایرهٔ (C) واقع باشد، مختصات آن درمعادلهٔ (۲) صدق می‌کند.

ثانیاً هرنقطه که مختصاتش در معادلهٔ(۲) صدق کند، روی دایرهٔ (C) واقع است.

به‌این دلیل معادلهٔ (۲) را معادلهٔ دایرهٔ (C) و دایرهٔ (C) را نمودار هندسی معادلهٔ (۲) می‌نامند. به‌طورکلی :

در مجموعهٔ اعداد حقیقی معادلهٔ دو مجهولی $f(x,y)=0$ و در صفحهٔ مختصات xOy شکلی مانند (C) را درنظر می‌گیریم.

اگر هرنقطه که متعلق به‌شکل (C) باشد مختصاتش در معادلهٔ $f(x,y)=0$ صدق کند و برعکس هرنقطه که مختصاتش درمعادلهٔ فوق صدق کند متعلق به‌شکل (C) باشد معادلهٔ $f(x,y)=0$ را معادلهٔ شکل (C) و شکل (C) را نمودار هندسی معادلهٔ $f(x,y)=0$ می‌نامند .

اکنون قضیهٔ زیر را دربارهٔ معادلهٔ دومجهولی درجهٔ اول و خط راست ثابت می‌کنیم:

۳ـ قضیه ـ اولاً ـ نمودار هندسی هر معادلهٔ درجهٔ اول یک یا دومجهولی برحسب x و y یک خط راست است.

ثانیاً ـ هرخط راست که در صفحهٔ مختصات واقع باشد، معادله‌اش از درجهٔ اول است.

برهان ـ صورت کلی معادلهٔ درجهٔ اول دومجهولی برحسب x و y عبارت است از :

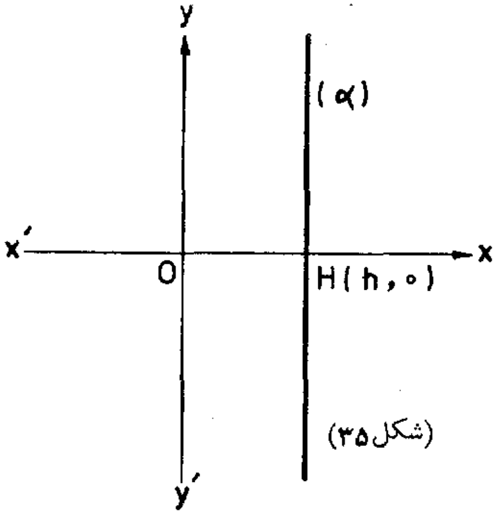
$$Ax+By+C=0 \qquad (*)$$

که در آن ضرایب A و B و C عددهای حقیقی هستند. فرض می‌کنیم که ضرایب A و B درعین‌حال صفر نباشند (چرا؟) و حالتهای زیر را تمیز می‌دهیم و در هر حالت قضیه را ثابت می‌کنیم .

حالت اول : $\boxed{B=0 \text{ و } A\neq 0}$

دراین حالت معادلهٔ (*) به‌صورت $x=-\frac{C}{A}$ در می‌آید و اگر $-\frac{C}{A}$ را h بنامیم ، حاصل می‌شود :

$$\boxed{x=h} \qquad (1)$$



(شکل ۳۵)

همهٔ نقاطی که طول آنها مقدار ثابت h است (و عرض آنها اختیاری است) روی خط راست (α) که از نقطهٔ $H(h,\circ)$ به موازات محور $y'y$ رسم شود واقع هستند (شکل ۳۵).

پس: نمودار هندسی رابطهٔ (۱) خط راست (α) است.

به‌خصوص اگر h صفر باشد، خط (α) برمحور $y'y$ منطبق می‌گردد. پس:

نمودار هندسی رابطهٔ $x=\circ$ محور $y'y$ است.

برعکس: هرنقطه که روی خط راست (α) واقع باشد (شکل ۳۵) طولش h است. پس **معادلهٔ هر خط راست که با محور $y'y$ موازی باشد به‌صورت $x=h$ است.** به‌خصوص:

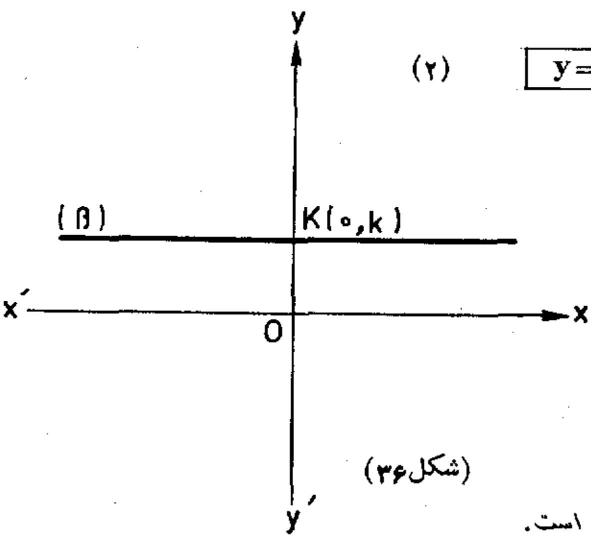
معادلهٔ محور $y'y$ عبارت است از $x=\circ$.

(تا اینجا قضیه را درحالت اول ثابت کردیم)

حالت دوم: $A=\circ$ و $B\neq\circ$

دراین حالت معادلهٔ (*) به‌صورت رابطهٔ $y=-\frac{C}{B}$ درمی‌آید و اگر $-\frac{C}{B}$ را k بنامیم، حاصل می‌شود:

$$y=k \qquad (۲)$$



(شکل ۳۶)

همهٔ نقاطی که عرض آنها مقدار ثابت k است (وطول آنها اختیاری است) روی خط راست (β) که از نقطهٔ $K(\circ,k)$ به موازات محور $x'x$ رسم شود واقع هستند (شکل ۳۶). پس نمودار هندسی رابطهٔ (۲) خط راست (β) است.

به‌خصوص اگر k صفر باشد، خط راست (β) برمحور $x'x$ منطبق می‌گردد. پس:

نمودار هندسی رابطهٔ $y=\circ$ محور $x'x$ است.

برعکس: هرنقطه که روی خط راست (β) واقع باشد، عرضش k است؛ پس معادلهٔ هر

خط راست که با محور $x'x$ موازی باشد، به‌صورت $y=k$ است. به‌خصوص :

معادلهٔ محور $x'x$ عبارت است از $y=0$.

(تا اینجا قضیه را درحالت دوم نیز ثابت کردیم)

حالت سوم : $\boxed{A\neq 0 \text{ و } B\neq 0 \text{ و } C=0}$

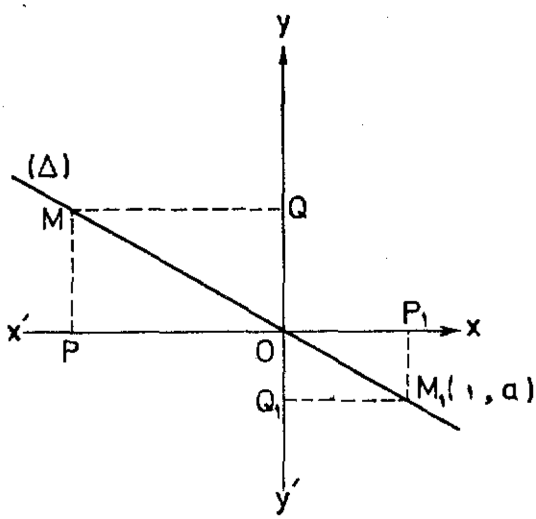
دراین حالت معادلهٔ (*) به صورت $y=-\frac{A}{B}x$ در می‌آید و اگر $-\frac{A}{B}$ راکه مخالف با صفر است a بنامیم، حاصل می‌شود:

$$\boxed{y=ax} \qquad (۳)$$

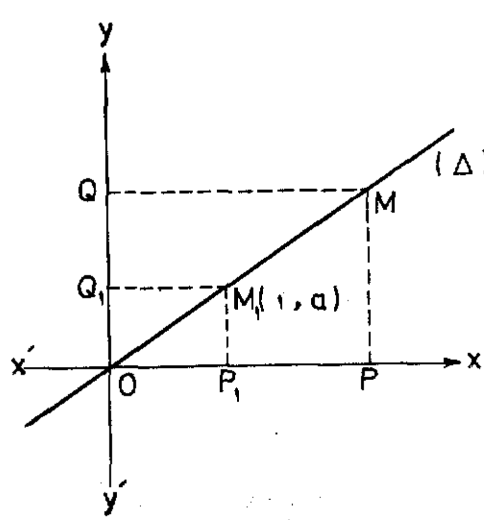
ابتدا ملاحظه می‌کنیم که درمعادلهٔ (۳) به‌ازای $x=0$ داریم $y=0$ پس مختصات مبدأ درمعادلهٔ (۳) صادق است و نقطهٔ O (مبدأ مختصات) روی نمودار هندسی معادلهٔ (۳) واقع می‌باشد .

اکنون نقطهٔ $M_1(1,a)$ را نیز که مختصاتش درمعادلهٔ(۳) صادقند درنظر گرفته خط راست OM_1 را رسم می‌کنیم و آن‌را (Δ) می‌نامیم. درشکل ۵۰ ضریب a مثبت است و خط (Δ) در ربعهای اول وسوم قراردارد. درشکل ۳۸ ضریب a منفی است و خط (Δ) در ربعهای دوم و چهارم واقع است. اما استدلال زیر در هر دوحالت شکل درست است و در هردوشکل داریم :

$$\overline{OP_1}=1 \qquad \text{و} \qquad \overline{P_1M_1}=a$$



(شکل۳۸)



(شکل۳۷)

اولانقطهٔ دلخواه M را روی‌خطراست (Δ) که از مبدأ مختصات‌می گذرد درنظرمی گیریم. مختصات M عبارتند از :

$$M : \begin{cases} x=\overline{OP} \\ y=\overline{OQ}=\overline{PM} \end{cases}$$

دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OP_1M_1 و OPM متشابه‌هستند (چرا؟) و با درنظرگرفتن‌اندازه‌های جبری داریم :

$$\frac{\overline{PM}}{\overline{P_1M_1}}=\frac{\overline{OP}}{\overline{OP_1}}$$

و یا $\frac{y}{a}=\frac{x}{1}$ یعنی $y=ax$

پس: هرنقطه که روی خط راست(Δ) که از مبدأ مختصات می‌گذرد واقع باشد، مختصاتش در معادلهٔ (۳) صدق می‌کند.

ثانیاً ـ نقطه‌ای مانند $M_0(x_0,y_0)$ در صفحهٔ مختصات در نظر گرفته (روی شکل نشان نشده است) فرض می‌کنیم که مختصات آن در معادلهٔ (۳) صدق کند . یعنی داشته باشیم :

$$y_0=ax_0$$

بنا بر آنچه در قسمت اول گفتیم ، نقطه‌ای از خط راست (Δ) که طولش x_0 باشد ، عرضش ax_0 است. پس نقطهٔ M_0 که بنابه‌فرض طولش x_0 و عرضش ax_0 است روی خط راست (Δ) قرار دارد. بنابراین:

هر نقطه که مختصاتش در معادلهٔ (۳) صدق کند، روی خط راست (Δ) واقع است.

از آنچه گذشت معلوم می‌شود که :

> اولا نمودار هندسی معادلهٔ درجهٔ اول $y=ax$ خط راستی است‌که از مبدأ مختصات و ازنقطهٔ $(1,a)$ می‌گذرد.
>
> ثانیاً بر عکس : هر خط راست که از مبدأ مختصات بگذرد معادله‌اش به‌صورت $y=ax$ است.

به همین دلیل گاهی به‌جای آن که بگوییم نمودار هندسی معادلهٔ $y=ax$ ، می گوییم خط $y=ax$.

(تا اینجا قضیه را درحالت سوم نیز ثابت‌کردیم)

حالت چهارم : $A\neq 0$ و $B\neq 0$ و $C\neq 0$

دراین حالت معادلهٔ (*) را می‌توان چنین نوشت :

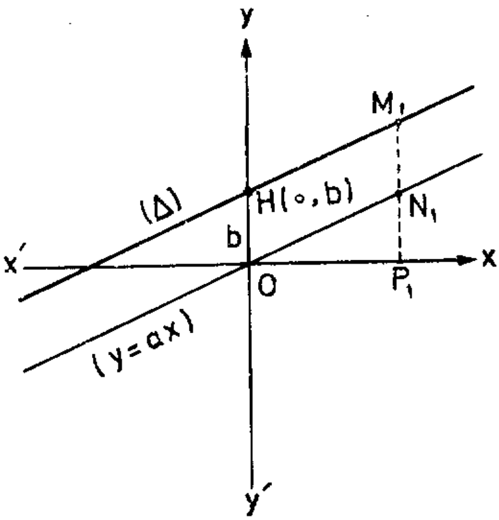
$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

و اگر $-\frac{A}{B}$ را a و $-\frac{C}{B}$ را b بنامیم، معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\boxed{y=ax+b} \qquad (۴)$$

اگر در معادلهٔ (۴) به‌جای x صفر قرار دهیم، حاصل می‌شود $y=b$. پس نقطهٔ H به مختصات (o,b) روی نمودار هندسی معادلهٔ (۴) قرار دارد.

اکنون‌ابتدا خط به‌معادلهٔ $y=ax$ را رسم‌کرده ازنقطهٔ $H(o,b)$ خط (Δ) را به‌موازات آن رسم می‌کنیم (شکل ۳۹).



(شکل ۳۹)

اولا ـ نقطهٔ $M_1(x_1,y_1)$ را روی خط راست (Δ) اختیار می‌کنیم. داریم:

$$\overline{P_1M_1}=y_1 \qquad و \qquad \overline{OP_1}=x_1$$

خط P_1M_1 خط $y=ax$ رادرنقطه‌ای مانند N_1 قطع می‌کند به‌قسمی‌که $\overline{P_1N_1}=ax_1$، و چون شکل OHM_1N_1 متوازی‌الاضلاع است پس:

$$\overline{N_1M_1}=\overline{OH}=b$$

اما نظر به‌رابطهٔ شال داریم:

$$\overline{P_1M_1}=\overline{P_1N_1}+\overline{N_1M_1}$$

و یا

$$y_1=ax_1+b$$

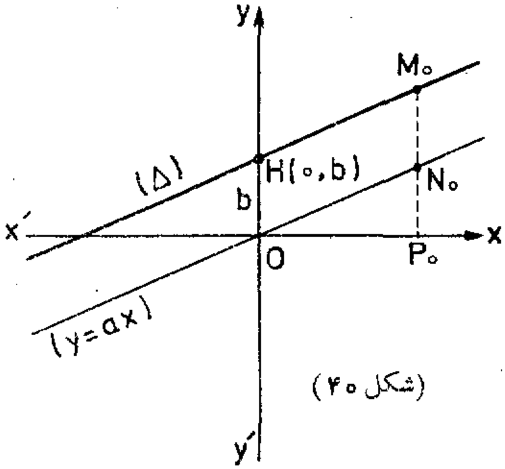
یعنی مختصات نقطهٔ M_1 درمعادلهٔ (۴) صادق است. پس:

هر نقطه که روی خط راست Δ واقع باشد، مختصاتش در معادلهٔ (۴) صدق می‌کند.

ثانیاً ـ فرض می‌کنیم که مختصات نقطه‌ای مانند M_o که آنها را $\overline{OP_o}=x_o$ و $\overline{P_oM_o}=y_o$ می‌نامیم درمعادلهٔ (۴) صادق باشند (شکل ۴۰)، یعنی داشته باشیم:

$$y_\circ = ax_\circ + b$$

خط $P_\circ M_\circ$ خط $y=ax$ را در نقطه‌ای مانند $N_\circ$ قطع می‌کند به‌قسمی که $\overline{P_\circ N_\circ} = ax_\circ$



(شکل ۴۰)

اما نظر به رابطهٔ شال داریم :

$$\overline{P_\circ M_\circ} = \overline{P_\circ N_\circ} + \overline{N_\circ M_\circ}$$

و یا $ax_\circ + b = ax_\circ + \overline{N_\circ M_\circ}$

و از آنجا $\overline{N_\circ M_\circ} = b = \overline{OH}$

بنابراین دو بردار $\overrightarrow{OH}$ و $\overrightarrow{N_\circ M_\circ}$ همسنگ هستند و شکل $OHM_\circ N_\circ$ متوازی‌الاضلاع است. پس $HM_\circ$ با خط $y=ax$ موازی است. یعنی نقطهٔ $M_\circ$ روی خط (Δ) واقع است. پس:

هرنقطه که مختصاتش در معادلهٔ (۴) صدق کند ، روی خط راست (Δ) واقع است.

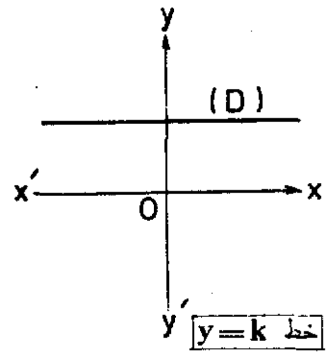
از آنچه گذشت معلوم می‌شود که :

> اولا نمودار هندسی معادلهٔ درجهٔ اول $y=ax+b$ خط راستی است که ازنقطهٔ $H(\circ,b)$ می‌گذرد و باخط $y=ax$ موازی است .
>
> ثانیاً هرخط راست که نه‌ازمبدأ مختصات بگذرد و نه بامحورها موازی باشد، معادله‌اش به‌صورت $y=ax+b$ است .

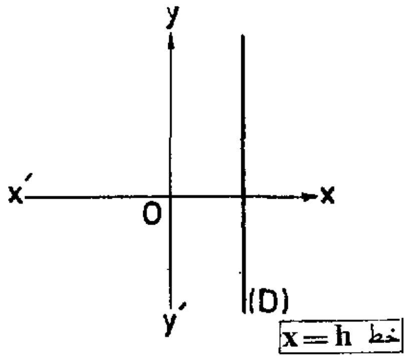
(بنابراین قضیه در همهٔ حالات ممکن ثابت شد)

۴ـ خلاصه ـ خلاصهٔ نتیجهٔ قضیهٔ شمارهٔ۳ درجدول زیر مندرج است و درشکلهای ۴۱ تا ۴۴ نشان داده شده است:

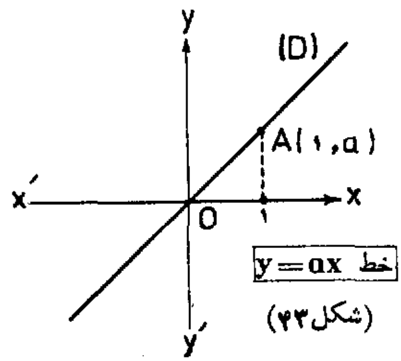
خط راست(D)	معادلهٔ خط (D)	معادلهٔ درجهٔاول $Ax+By+C=\circ$
برمحور $x'x$ منطبق است	$y=\circ$	$B\neq\circ\ ,\ A=C=\circ$
با محور $x'x$ موازی است	$y=b$	$C\neq\circ\ ,\ B\neq\circ\ ,\ A=\circ$
بر محور $y'y$ منطبق است	$x=\circ$	$C=\circ\ ,\ B=\circ\ ,\ A\neq\circ$
با محور $y'y$ موازی است	$x=h$	$C\neq\circ\ ,\ B=\circ\ ,\ A\neq\circ$
از مبدأ مختصات می‌گذرد	$y=ax$	$C=\circ\ ,\ B\neq\circ\ ,\ A\neq\circ$
نه از مبدأ می‌گذرد و نه با محورها موازی است	$y=ax+b$	$C\neq\circ\ ,\ B\neq\circ\ ,\ A\neq\circ$



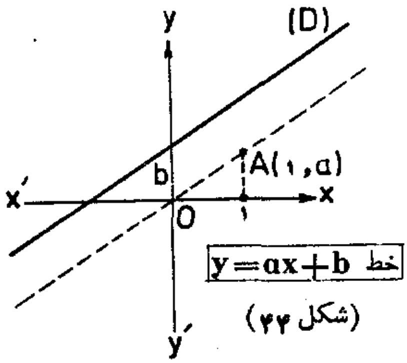
(شکل ۴۱)



(شکل ۴۲)



(شکل ۴۳)

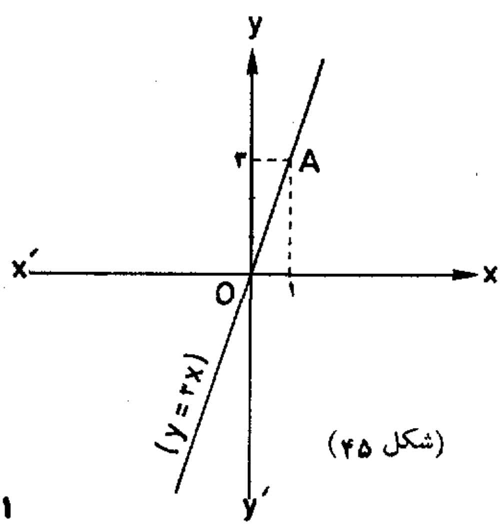


(شکل ۴۴)

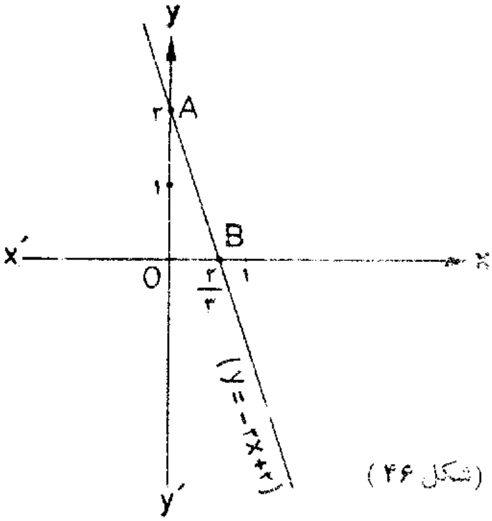
۵- چگونگی ترسیم خط راستی که معادلهٔ آن معلوم باشد - برای ترسیم یك خط راست کافی است که دونقطه از آن را بشناسیم. پس اگر معادلهٔ خط راست معلوم باشد، دو مقدار به x نسبت می‌دهیم تا نظیر آنها دومقدار برای y به‌دست آید. سپس از دونقطه‌ای که به‌این ترتیب حاصل می‌شود یك خط راست می‌گذرانیم.

البته بهتر است که یك بار x را صفر بگیریم و y نظیر آن‌را حساب کنیم و یك بار y را صفر بگیریم و x نظیر آن‌را حساب کنیم تا فصل مشترکهای خط با محورها به‌دست‌آید.

مثال ۱ - رسم خط: $y=۳x$. این خط از مبدأ مختصات یعنی نقطهٔ $O(۰,۰)$ می‌گذرد. به ازای $x=۱$ داریم $y=۳$؛ پس‌خط ازنقطهٔ $A(۱,۳)$ نیز می‌گذرد و کافی است خط راستی راکه از دو نقطهٔ O و A می‌گذرد رسم کنیم (شکل ۴۵).

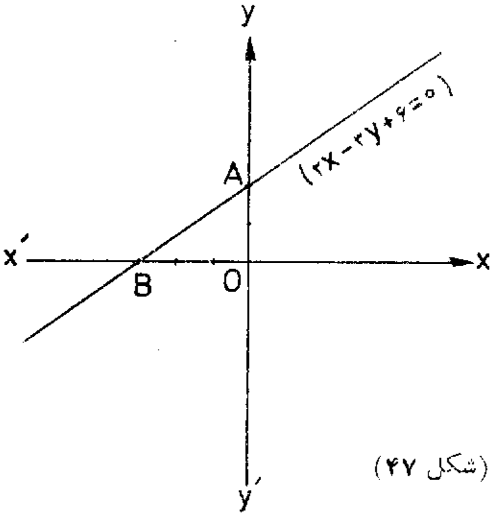


(شکل ۴۵)



(شکل ۴۶)

مثال ۲ ـ رسم خط : $y=-۳x+۲$. این خط به‌وسیلهٔ دو نقطهٔ $A(۰,۲)$ و $B(\frac{۲}{۳},۰)$ (شکل ۴۶) مشخص می‌شود (چرا؟).



(شکل ۴۷)

مثال ۳ ـ رسم خط : $۲x-۳y+۶=۰$. لازم نیست که معادله را برحسب y حل کنیم، بلکه همان‌گونه که گفتیم کافی است دو نقطه از خط را به‌دست آوریم. این خط به‌وسیلهٔ دو نقطهٔ $A(۰,۲)$ و $B(-۳,۰)$ (شکل ۴۷) مشخص می‌شود (چگونه؟).

تمرین

نمودار هندسی هریک از معادلات زیر را رسم کنید:

۱	$y=۴$	۲	$x=-۳$
۳	$y=x$	۴	$y=-x$
۵	$y=\frac{۲}{۳}x$	۶	$y=\frac{۳}{۲}x$
۷	$y=x+۱$	۸	$y=-x+۲$
۹	$y=\sqrt{۳}x-۳$	۱۰	$y=-\sqrt{۲}x+۲$
۱۱	$۳x-۲y=۰$	۱۲	$x+۵y=۰$

۱۳ $2x-4y=7$ ۱۴ $-2x+7y-5=0$

۱۵ $3x+2y-4=0$ ۱۶ $x+y+1=0$

۱۷ ـ آیا نمودار هندسی معادلهٔ $y=x$ خط نیمساز ربعهای اول وسوم است؟ (چرا؟).

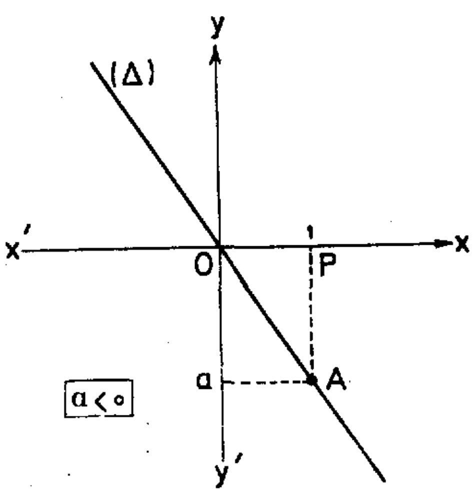
۱۸ ـ آیا نمودار هندسی معادلهٔ $y=-x$ خط نیمساز ربعهای دوم و چهارم است ؟ (چرا؟) .

۶ـ ضریب زاویه‌ای وعرض از مبدأ خط راست

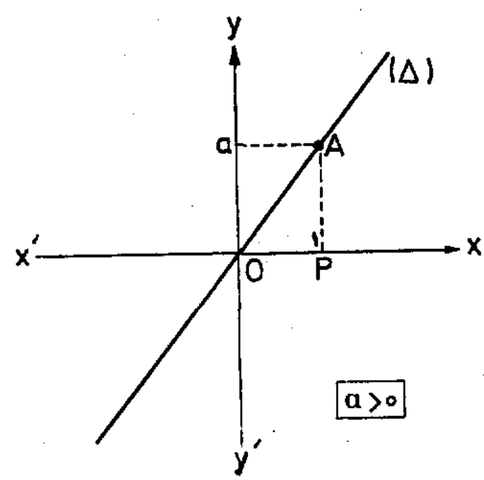
حالت اول ـ ضریب زاویه‌ای خط $y=ax$

دیدیم که نمودارهندسی معادلهٔ $y=ax$ خط راستی‌است مانند (Δ) که از مبدأ مختصات و ازنقطهٔ $A(1,a)$ می‌گذرد.

اگر a مثبت باشد $(a>0)$ واضح است که (Δ) که از مبدأ مختصات می‌گذرد در دوربع اول و سوم واقع است (شکل۴۸) . همچنین اگر a منفی باشد $(a<0)$ خط (Δ) در دو ربع دوم و چهارم قرار دارد (شکل۴۹) .



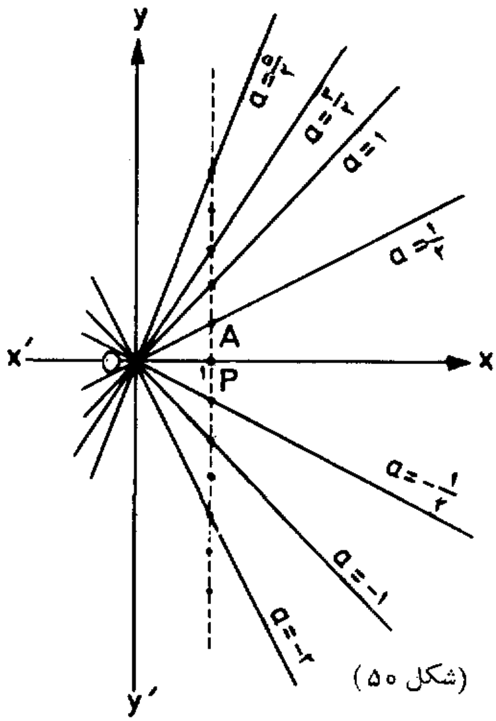
(شکل۴۹)



(شکل۴۸)

گذشته از این اگر قدر مطلق a زیاد شود زاویهٔ حادهٔ AOP که خط Δ با محور $x'x$ تشکیل می‌دهد زیاد می‌شود و برعکس.

در شکل ۵۰ خط $y=ax$ به‌ازای مقادیر مختلفی از a رسم شده است . از روی این شکل واضح است که زاویهٔ حاده‌ای که مثلا خط $y=\frac{3}{2}x$ بامحور $x'x$ پدید می‌آوردبزرگتر است از زاویه‌ای که خط $y=x$ با $x'x$ تشکیل می‌دهد ، (زیرا $\frac{3}{2}>1$) . همچنین زاویهٔ



$\overline{OP}=۱$

$\overline{PA}=a$

(شکل ۵۰)

حاده‌ای که مثلا خط $y=-۲x$ با $x'x$ پدید می‌آورد بزرگتر است از زاویه‌ای که خط $y=-x$ با $x'x$ تشکیل می‌دهد.

به‌این مناسبت ؛ ضریب a را در معادلهٔ $y=ax$ ضریب زاویه‌ای خط $y=ax$ می‌نامند.

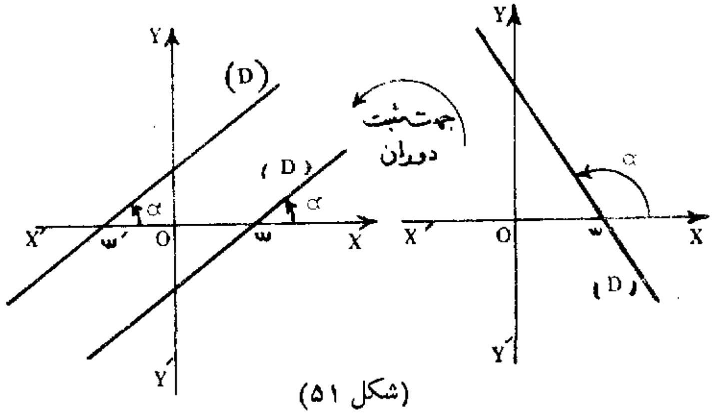
ضریب زاویه‌ای محور $x'Ox$ و هر خط که با آن موازی باشد مساوی است با صفر (چرا ؟) .

ضریب زاویه‌ای محور $y'Oy$ وهر خط که باآن موازی‌باشد تعریف‌نشده است .

توجه‌کنید : بین ضریب زاویه‌ای خط $y=ax$ و تانژانت زاویهٔ بین این خط ومحور $x'x$ رابطه‌ای وجود داردکه برای تعیین آن ابتدا زاویهٔ بین یك خط راست و محور $x'x$ را تعریف می‌کنیم:

تعریف ـ هر خط مانند D (شکل ۵۱) که با محور $x'x$ موازی یا برآن منطبق نباشد، آن را درنقطه‌ای مثل ω قطع می‌کند . زاویهٔ α کـه باید بـه انـدازهٔ آن ، محور $x'Ox$ را در حول ω در جهت مثبت[1] دوران دهیم تا بر D منطبق شود ، زاویهٔ خط D با محور $x'x$

۱ـ درصفحهٔ مختصات، جهت مثبت دوران، جهتی است که باید درآن جهت نیم‌خط Ox را به اندازهٔ ۹۰° در حول نقطهٔ O دوران دهیم تا بر نیم‌خط Oy منطبق شود .



(شکل ۵۱)

نامیده می‌شود .

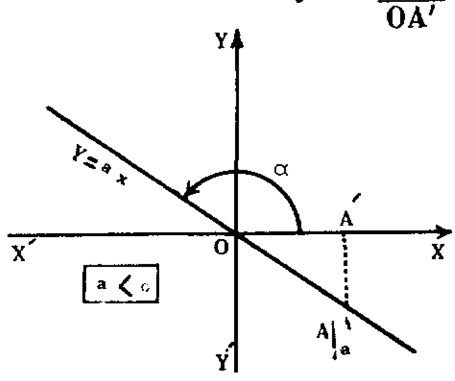
اکنون با توجه به‌تعریف بالا ، رابطهٔ موجود بین a و $tg\alpha$ را با اثبات قضیهٔ زیر معین می‌سازیم :

قضیه ـ ضریب زاویه‌ای خط $y=ax$ یعنی عدد جبری a مساوی است با تانژانت زاویهٔ خط با محور $x'x$[1] .

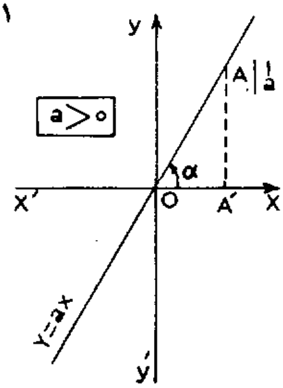
برهان ـ قبلا دیده‌ایم که برای ترسیم خط $y=ax$ ، کافی است که مبدأ مختصات‌را به نقطهٔ $A(1,a)$ وصل کنیم؛ حال برحسب آن‌که a مثبت یا منفی باشد، دوحالت تمیز می‌دهیم.

الف- $a>0$: دراین صورت ، نقطهٔ A در داخل زاویهٔ xOy واقع و زاویهٔ α حاده و تانژانت آن مثبت است و به‌آسانی از روی شکل ۵۲ دیده می‌شود :

$$tg\alpha=\frac{\overline{A'A}}{\overline{OA'}}=\frac{a}{1}=a$$



شکل ۵۳



شکل ۵۲

۱ـ این قضیه فقط درصورتی‌صحت داردکه طول وعرض نقاط ، روی دومحور ، با یك‌واحد مشترك سنجیده شده باشند .

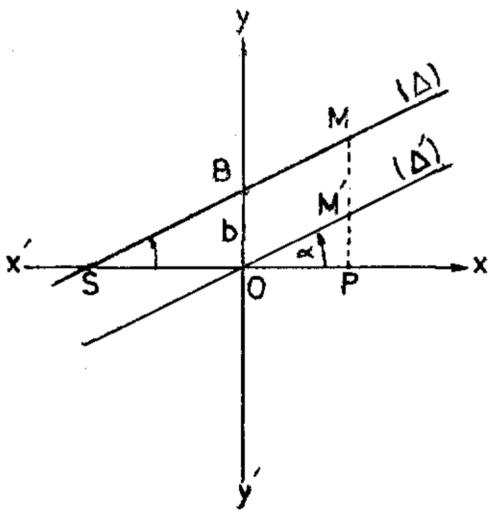
ب- $a<0$ دراین صورت نقطهٔ $A(1,a)$ در داخل زاویهٔ xOy' واقع است و زاویهٔ α منفرجه و تانژانت آن منفی است و بعلاوه $\overline{AA'}=-a$ می‌باشد (چرا ؟) . و از روی شکل ۵۳ دیده می‌شود که :

$$tg\alpha=-tg\widehat{AOA'}=-\frac{\overline{AA'}}{\overline{OA'}}=-\overline{AA'}=-(-a)=a$$

حالت دوم ـ ضریب زاویه‌ای خط $y=ax+b$ وعرض از مبدأ آن

چون خط (Δ) به‌معادلهٔ $y=ax+b$ با خط (Δ') به معادلهٔ $y=ax$ موازی است اندازهٔ زاویه‌ای که این دوخط بامحور $x'x$ پدید می‌آورند یکی‌است. درشکل ۵۴ دیده می‌شود که $\widehat{MSP}=\widehat{M'OP}$ و در نتیجه $tg\widehat{MSP}=tg\widehat{M'OP}=a$.

به‌این مناسبت : ضریب a که ضریب زاویه‌ای خط $y=ax$ است ضریب زاویه‌ای خط $y=ax+b$ نیز نامیده می‌شود.



(شکل۵۴)

می‌دانیم‌که خط $y=ax+b$ محور $y'y$ را درنقطهٔ B به‌عرض $\overline{OB}=b$ قطع می‌کند. درمعادلهٔ $y=ax+b$ مقدار b را عرض از مبدأ خط $y=ax+b$ می‌نامند.

اگر خطی از مبدأ مختصات بگذرد، یعنی معادلهٔ آن به‌صورت $y=ax$ باشد، عرض از مبدأ آن صفر است.

مثال ـ درجدول زیر ضریب زاویه‌ای وعرض از مبدأ چند خط معین شده است:

معادلهٔ خط	ضریب زاویه‌ای	عرض از مبدأ
$y=۳$	صفر	۳
$y=-۵x$	-۵	صفر
$y=۲x-۵$	۲	-۵
$y=-mx+h$	$-m$	h

حالت سوم ـ ضریب زاویه‌ای و عرض از مبدأ خط $Ax+By+C=0$

اگر معادلهٔ خط راست به‌صورت $Ax+By+C=0$ باشد، معادله را برحسب y حل می‌کنیم:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

دراین‌صورت ضریب زاویه‌ای خط مساوی با $-\frac{A}{B}$ و عرض ازمبدأآن مساوی با $-\frac{C}{B}$ است.

توجه کنیدـ ضریب زاویه‌ای خط $Ax+By+C=0$ عبارت است ازضریب x وقتی که معادله نسبت به y حل شده به‌صورت $y=f(x)$ درآمده باشد.

مثال ـ برای تعیین ضریب زاویه‌ای وعرض از مبدأ خط به معادلهٔ:

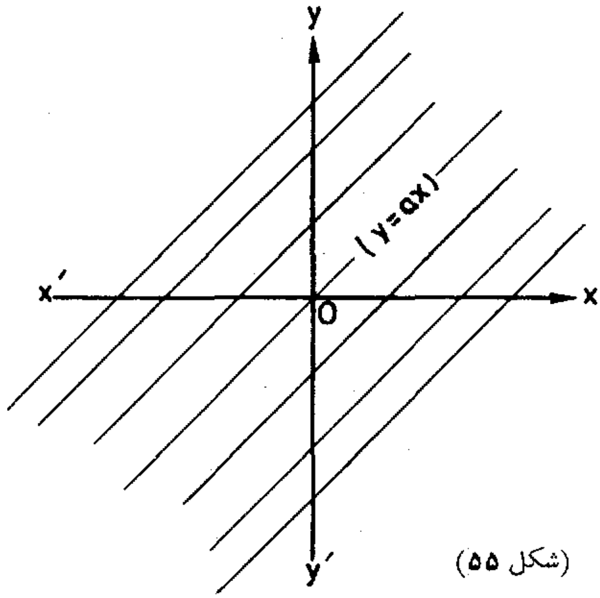
$$۵x-۳y-۴=0$$

معادله را برحسب y حل می‌کنیم، حاصل می‌شود:

$$y=\frac{۵}{۳}x-\frac{۴}{۳}$$

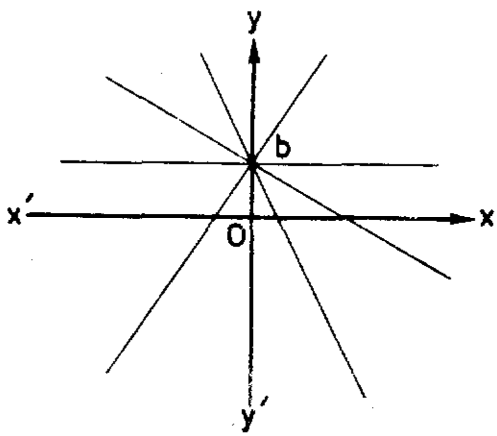
پس ضریب زاویه‌ای خط $\frac{۵}{۳}$ و عرض از مبدأ آن $-\frac{۴}{۳}$ است.

۷ـ تبصره ـ اگر ضریب زاویه‌ای خط $y=ax+b$ یعنی a ثابت بماند ولی عرض‌از مبدأ آن یعنی b تغییر کند، مجموعهٔ خطوط راستی از صفحهٔ مختصات که همه با خط $y=ax$ موازی هستند حاصل می‌شود. همهٔخطوطی که درشکل ۵۵ رسم شده دارای ضریب زاویه‌ای a بوده و با خط $y=ax$ موازی هستند.



(شکل ۵۵)

اگر عرض از مبدأ خط $y = ax + b$ یعنی b ثابت بماند ولی ضریب زاویه‌ای آن تغییر کند ، مجموعهٔ خطوط راستی از صفحهٔ مختصات که همه از نقطهٔ (o, b) می‌گذرند حاصل می‌شود . همهٔ خطوط راستی که درشکل ۵۶ رسم شده‌اند دارای یك عرض از مبدأ هستند .



(شکل ۵۶)

تمرین

ضریب زاویه‌ای وعرض از مبدأ هریك ازخطوط راست زیر را معین کنید:

۱ $y = x$ ۲ $y = -x$

۳ $y = ۲x$ ۴ $y = -۳x$

۵ $y = x + ۱$ ۶ $y = -x + ۲$

۷ $y=۲x-۷$

۸ $y=-\sqrt{۲}x+۳$

۹ $y=\sqrt{۳}x+\sqrt{۵}$

۱۰ $۳x-۲y=۰$

۱۱ $x+۵y=۰$

۱۲ $۲x-۴y=۷$

۱۳ $-۲x+۷y-۵=۰$

۱۴ $۳x-۲y-۴=۰$

۱۵ $y=۳$

۱۶ $x=-۵$

۱۷ ـ جدول زیر را کامل کنید:

ضریب زاویه‌ای خط	عرض از مبدأ خط	معادلهٔ خط
۳	۴	
-۲	۰	
۰	۵	
۶	-۱	
$-\sqrt{۲}$	۳	

۱۸ ـ چهار خط زیر را نسبت به یك دستگاه مختصات رسم کنید :

$$y=۳x+۲ \ ، \ y=-۲x+۲ \ ، \ y=x+۲ \ ، \ y=۲$$

آیا همهٔ این خطوط از یك نقطه می‌گذرند؟

۱۹ ـ چهار خط زیر را نسبت به یك دستگاه مختصات رسم کنید :

$$y=۲x+۳ \ ، \ y=۲x-۱ \ ، \ y=۲x+۱ \ ، \ y=۲x$$

آیا همهٔ این خطوط با هم موازیند؟

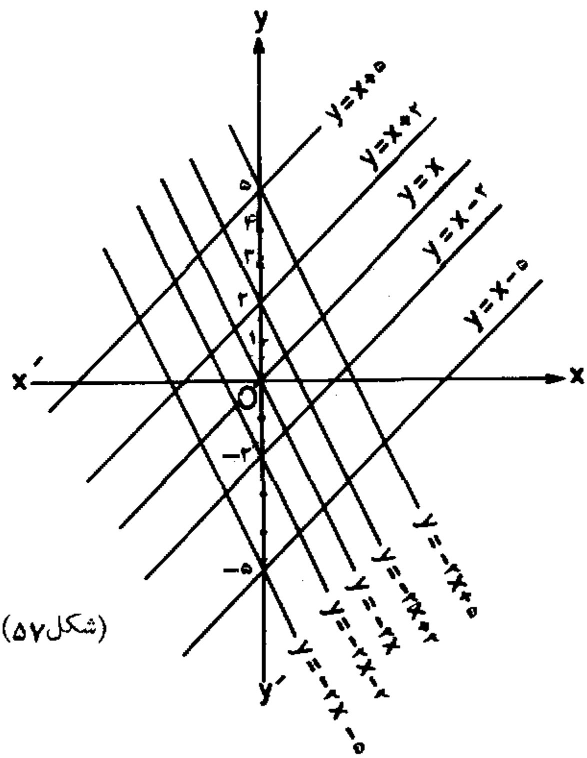
II ـ مسائل مربوط به خط راست

۸ـ معادلهٔ عمومی مجموعهٔ خطوط متوازی واقع درصفحه ـ همچنان‌که در شمارهٔ ۷ گفتیم اگر دوخط با هم موازی باشند، ضریب زاویه‌ای آنها یکی است. پس هر خط که مثلا با خط $y=mx$ موازی‌باشد، ضریب زاویه‌ای آن m است. بنابراین معادلهٔ عمومی همهٔ خطهای راست‌که با خط $y=mx$ موازی هستند به‌صورت زیر است:

$$y=mx+h \qquad (۱)$$

اگر در معادلهٔ فوق m را ثابت نگاه‌داریم و h را تغییر دهیم، خطوط راست بی‌شماری حاصل می‌شود که همهٔ آنها با هم موازی هستند.

درشکل ۵۷ چند عضو از مجموعهٔ خطوط راست موازی با خط $y=x$ و چند عضو از مجموعهٔ خطوط راست موازی با خط $y=-۲x$ رسم شده است.

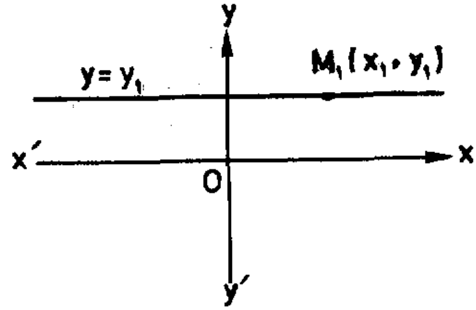


(شکل۵۷)

تبصره ـ همهٔ خطوط راستی که با محور $x'x$ موازی هستند ضریب زاویه‌ای آنها صفر است و معادلهٔ آنها به‌صورت $y=b$ است.

همهٔ خطوط راستی که با محور $y'y$ موازی‌هستند معادلهٔ آنها به‌صورت $x=a$ می‌باشد و ضریب زاویه‌ای آنها تعریف شده است.

۹ـ معادلهٔ خط راستی که از نقطهٔ معلوم $M_1(x_1, y_1)$ بگذرد و ضریب زاویه‌ای آن عدد معلوم a باشد ـ اگر a صفر باشد، خط با محور $x'x$ موازی است (شکل۵۸) و چون از نقطهٔ M_1 می‌گذرد، معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:



$$y=y_1$$

(شکل ۵۸)

اگر a صفر نباشد، معادلهٔ خط به‌این صورت است:

$$(1) \qquad y = ax + b$$

و چون a معلوم است، باید b رامعین کرد. چون خط ازنقطهٔ $M_1(x_1,y_1)$ می‌گذرد، مختصات این نقطه درمعادلهٔ خط صدق می‌کند، یعنی داریم :

$$(2) \qquad y_1 = ax_1 + b$$

اگر تساوی (۲) را عضو به عضو ازتساوی (۱) کم‌کنیم، معادلهٔ خط به‌دست می‌آید:

$$\boxed{y - y_1 = a(x - x_1)}$$

توجه‌کنید ـ درمعادلهٔ فوق x_1 و y_1 مقادیر ثابت هستند و x و y به‌ازای‌نقاط مختلف خط تغییر می‌کنند. به‌این مناسبت در معادلهٔ فوق x و y را مختصات جاری می‌نامند.

مثال ـ معادلهٔ خط راستی‌که از نقطهٔ $M(5,2)$ بگذرد و ضریب زاویه‌ایش $-\frac{2}{3}$ باشد عبارت است از :

$$y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 5)$$

ویا $\qquad 3y - 6 = -2x + 10$

ویا $\qquad 2x + 3y - 16 = 0$

۱۰ ـ معادلهٔ عمومی مجموعهٔ خطوط راستی که از یك نقطهٔ معلوم می‌گذرند

ـ دیدیم که معادلهٔ : $y - y_1 = a(x - x_1)$
معادله خط راستی است‌که از نقطهٔ $M_1(x_1,y_1)$ می‌گذرد و ضریب زاویه‌ایش a است.

اگر دراین معادله a را تغییر دهیم، خطوط حاصل همه ازنقطهٔ (x_1,y_1) می‌گذرند.

مثال ـ می‌خواهیم ثابت‌کنیم‌که به‌ازای مقادیر مختلف m همهٔ خطوط راستی‌که معادلهٔ آنها به‌صورت زیر است از یك نقطهٔ ثابت می‌گذرند.

$$(1) \qquad y - mx + 2 + 3m = 0$$

برهان ـ معادلهٔ فوق را می‌توان چنین نوشت :

$$y + 2 = m(x - 3)$$

به‌ازای $x = 3$ و $y = -2$ معادلهٔ فوق به‌صورت $0 = m \times 0$ در می‌آید و m هر چه باشد صحیح است. پس خط راستی‌که معادلهٔ(۱) معادلهٔ آن است از نقطهٔ ثابت $(3, -2)$ می‌گذرد .

۱۱ ـ معادلهٔ خط راستی که از نقطهٔ $M_1(x_1,y_1)$ می‌گذرد و با خط به معادلهٔ $y = mx + h$ موازی است

ـ چون خط مطلوب با خط $y = mx + h$ موازی است، ضریب زاویه‌ای آن m است و بنابرآنچه درشمارهٔ ۱۰ گفتیم، معادلهٔ آن عبارت است‌از:

$$\boxed{y-y_1=m(x-x_1)}$$

مثال ـ معادلهٔ خط راستی‌که از نقطهٔ $M(1,-1)$ بگذرد و با خط $x-2y+5=0$ موازی باشد.

ضریب زاویه‌ای خط $x-2y+5=0$ عبارت است از $\frac{1}{2}$ (چرا؟)، ومعادلهٔ‌مطلوب چنین است:

$$y+1=\frac{1}{2}(x-1)$$

ویا

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$$

۱۲ـ تعیین ضریب زاویه‌ای خط راستی‌که از دونقطهٔ معلوم $M_1(x_1,y_1)$ و $M_2(x_2,y_2)$ می‌گذرد

ـ ضریب زاویه‌ای خط را a می‌نامیم. چون این خط باید ازنقطهٔ $M_1(x_1,y_1)$ بگذرد، معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$y-y_1=a(x-x_1)$$

و چون این خط باید از نقطهٔ $M_2(x_2,y_2)$ نیز بگذرد، داریم:

$$y_2-y_1=a(x_2-x_1)$$

و از آنجا:

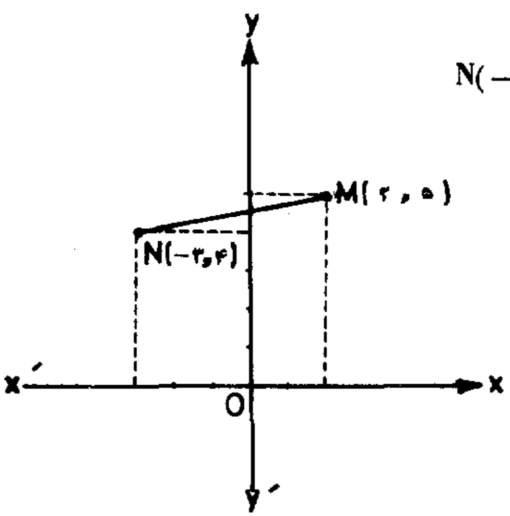
$$\boxed{a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

یعنی:

> **ضریب زاویه‌ای خط راستی که از دو نقطهٔ معلوم می‌گذرد مساوی است با خارج قسمت تفاضل عرضهای آن دونقطه برتفاضل طولهای نظیر آنها.**

مثال ـ محاسبهٔ ضریب زاویه‌ای خط راستی که از دو نقطهٔ $M(2,5)$ و $N(-3,4)$ می‌گذرد:

$$a=\frac{4-5}{-3-2}=\frac{1}{5}$$



(شکل ۵۹)

۱۳ـ معادلهٔ خط راستی‌که از دو نقطهٔ معلوم $M_1(x_1,y_1)$ و $M_2(x_2,y_2)$ می‌گذرد ـ درشمارهٔ قبل دیدیم که ضریب زاویه‌ای این خط مساوی است با $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$، و چون این مقدار را درمعادلهٔ $y-y_1=a(x-x_1)$ به‌جای a قرار دهیم، حاصل می‌شود:

$$\boxed{y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)}$$

توجه‌کنید ـ درمعادلهٔ فوق مقادیر x_1 ، y_1 ، x_2 و y_2 مقادیر معلوم و ثابت هستند اما **x و y مختصات عمومی یا کلی می‌باشند**.

مثال ـ معادلهٔ خط راستی‌که از دو نقطهٔ $M_1(۲,۵)$ و $M_2(-۳,۴)$ می‌گذرد عبارت است از :

$$y-۵=\frac{۴-۵}{-۳-۲}(x-۲)$$

ویا

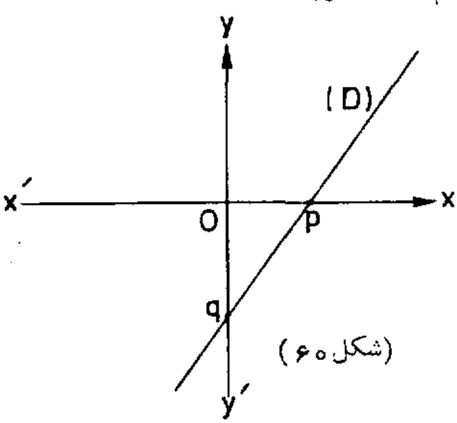
$$y-۵=\frac{۱}{۵}(x-۲)$$

ویا

$$۵y-x-۲۳=۰$$

(رجوع کنید به شکل۷۲)

۱۴ـ حالت خاص ـ اگر دو نقطهٔ معلوم روی محورهای مختصات باشند ، معادلهٔ خط به‌صورت ساده‌ای در می‌آید . فرض کنیم که خط (D) محور xها را درنقطهٔ به طول p و محور yها را در نقطهٔ به عرض q قطع کند (شکل۶۰)، در این صورت معادلهٔ خط عبارت خواهد بود از:



(شکل ۶۰)

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=۱$$

(معادلهٔ فوق چگونه به‌دست آمده است؟)

۱۵ـ شرط لازم وکافی برای آن‌که دوخط راست با هم موازی باشند ـ

چون خطوط راست متوازی دارای ضریب زاویه‌ایهای متساویند و برعکس خطوط راستی که ضریب زاویه‌ای آنها با هم مساوی باشند متوازی می‌باشند، برای آن‌که دو خط به‌معادلات:

$$(D) \qquad y=ax+b$$

$$(D') \qquad y=a'x+b'$$

با هم موازی باشند لازم و کافی است که داشته باشیم : $\boxed{a=a'}$

مثال ـ خطوط به‌معادلهٔ $y=-3x+5$ و $y=-3x-2$ و $y=-3x-\frac{7}{2}$ هر سه با هم موازی هستند.

۱۶ـ شرط لازم و کافی برای آن‌که دوخط راست برهم عمود باشند ـ

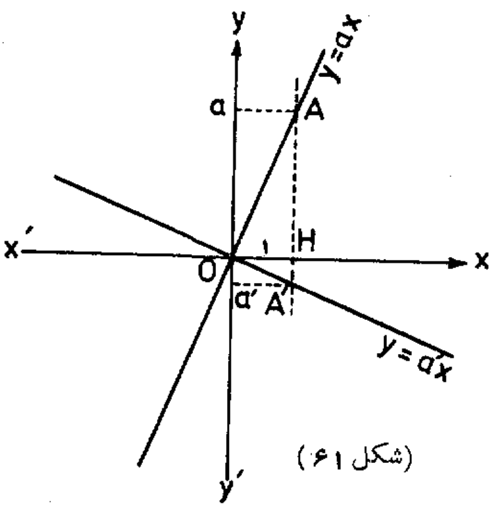
دیدیم که خط $y=ax+b$ با خط $y=ax$ که از مبدأ مختصات می‌گذرد موازی است . بنابراین برای آن‌که دوخط

$$(D) \qquad y=ax+b$$

و

$$(D') \qquad y=a'x+b'$$

برهم عمود باشند لازم و کافی است‌که دوخط $y=ax$ و $y=a'x$ برهم عمود باشند. اکنون دوخط $y=ax$ و $y=a'x$ (شکل ۶۱) را درنظر گرفته از نقطهٔ H به‌طول ۱ واقع بر محور $x'x$ خطی عمود بر $x'x$ رسم می‌کنیم تا اولی را در نقطهٔ A و دومی را در نقطهٔ A' قطع کند. مختصات نقاط A و A' عبارتنداز $A(1,a)$ و $A'(1,a')$.



(شکل ۶۱)

برای آن که دوخط OA و OA' برهم عمودباشند یعنی مثلث AOA' در رأس O قائم‌الزاویه باشد، بنا بر عکس قضیهٔ فیثاغورس لازم و کافی است که داشته باشیم :

$$(1) \qquad \overline{OA}^2+\overline{OA'}^2=\overline{AA'}^2$$

اما $\overline{OA}^2=1+a^2$ و $\overline{OA'}^2=1+a'^2$ و $\overline{AA'}^2=(a-a')^2$ ؛ پس رابطهٔ (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(1+a^2)+(1+a'^2)=(a-a')^2$$

و از آنجا

$$\boxed{aa'=-1}$$

یعنی : شرط لازم و کافی برای آن که دو خط راست برهم عمود باشند این‌است‌که حاصل‌ضرب ضریب زاویه‌ای آنها مساوی با ۱ــ باشد.

۱۷ـ فصل مشترك دوخط راست

دوخط راست (D) و (D') را که معادلات آنها :

$$(D) \qquad ax+by=c$$

$$(D') \qquad a'x+b'y=c'$$

است و دریك صفحهٔ مختصات رسم شده‌اند درنظر می‌گیریم.

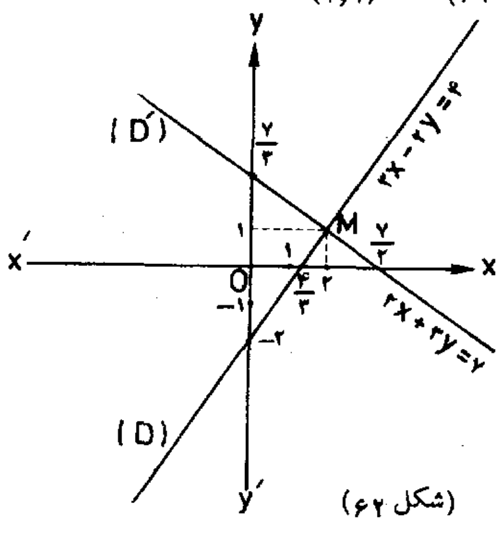
مختصات نقطهٔ M فصل مشترك دوخط (D) و (D') در هریك از دو معادلهٔ فوق صادق است و درنتیجه جواب دستگاه متشکل از دومعادلهٔ دومجهولی فوق می‌باشد. بنابراین :

برای محاسبهٔ مختصات نقطهٔ فصل مشترك دو خط راست کافی‌است دستگاهی راکه ازمعادلات این دو خط تشکیل می‌شود حل کنیم .

مثال ـ می‌خواهیم مختصات نقطهٔ M فصل مشترك دو خط زیر را حساب‌کنیم :

$$(۱)\begin{cases} ۳x-۲y=۴ & (D) \\ ۲x+۳y=۷ & (D') \end{cases}$$

دستگاه (۱) را حل می‌کنیم حاصل می‌شود $x=۲$ و $y=۱$ ، بنابراین فصل‌مشترك دوخط مفروض (شکل ۶۲) نقطهٔ $M(۲,۱)$ است.



(شکل ۶۲)

۱۸ـ حل ترسیمی دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی درجه اول ـ

هرگاه یك دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی درجهٔ اول داشته باشیم و هر یك از دو معادلهٔ دستگاه را معادلهٔ یك خط راست فرض‌کرده آن دوخط را روی یك صفحهٔ مختصات رسم‌کنیم، می‌توان مختصات فصل مشترك دوخط مرسوم را ازطریق اندازه‌گیری بر روی دو محور به‌وجه تقریبی به‌دست آورد. این مختصات جواب دستگاه مفروض می‌باشند.

بحث ـ دو خط راست (D) و (D′) را که معادلات آنها :

$$(۱)\qquad \begin{cases} ax+by=c & (D) \\ a'x+b'y=c' & (D') \end{cases}$$

هستند در نظر می‌گیریم. این دوخط ممکن است متقاطع یا متوازی و یا برهم منطبق باشند. بنابراین سه‌حالت زیر را تمیز می‌دهیم :

اولا (D) و (D′) متقاطع هستند ـ دراین حالت ضریب زاویه‌ای دوخط با هم متفاوت هستند (چرا؟) و داریم :

$$ab'-a'b\neq ۰ \qquad \text{و یا} \qquad -\frac{a}{b}\neq -\frac{a'}{b'}$$

دو خط (D) و (D′) یك وفقط یك نقطهٔ مشترك دارند ودستگاه معادلات (۱) دارای یك جواب است.

ثانیاً (D) و (D′) باهم موازیند ـ در این حالت ضریب زاویه‌ای دو خط با هم مساویند اما عرض از مبدأ آنها متفاوت است پس داریم :

$$\frac{c}{b}\neq\frac{c'}{b'} \qquad \text{و} \qquad -\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'}$$

یعنی

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$$

دو خط نقطهٔ مشترك ندارند و دستگاه (۱) جواب ندارد.

ثالثاً (D) و (D′) برهم منطبق هستند ـ دراین حالت ضریب زاویه‌ایهای دو خط با هم و عرض از مبدأهای آنها نیز با هم مساویند و داریم :

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

و دستگاه (۱) مبهم است.

به‌این ترتیب نتایج بحثی را که درکتاب حساب و جبر سال اول در بارهٔ حل دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی درجهٔ اول دیده بودیم به‌وجهی دیگر به‌دست آوردیم.

تمرین

۱ـ معادلهٔ عمومی خطوط راستی راکه ضریب زاویه‌ای آنها m است درهریك ازحالات زیر بنویسید :

$$m=\sqrt{۳}\ ,\ m=\frac{۴}{۳}\ ,\ m=۰\ ,\ m=-۳\ ,\ m=۲$$

۲ـ معادلهٔ خط راستی را که ضریب زاویه‌ای آن a است و از نقطهٔ M می‌گذرد در هر یك از حالات زیر بنویسید:

$a=۱$	$M(۲,۳)$
$a=-۲$	$M(-۳,۰)$
$a=۴$	$M(۲,-۵)$
$a=\sqrt{۳}$	$M(-۳,-۴)$

۳ـ معادلهٔ عمومی خطوط راستی را که از نقطهٔ M می‌گذرد، در هر یك از حالات زیر بنویسید :

$M(۲,۱)$, $M(-۲,-۱)$, $M(۳,۰)$

$M(۰,۷)$, $M(-۷,۲)$, $M(-۵,-۱)$

۴ـ معادلهٔ خط راستی را که از نقطهٔ M می‌گذرد و با خط (D) موازی است درهریك‌از حالات زیر بنویسید :

$M(۱,۲)$	$y=۳x+۴$	(D):
$M(-۱,۳)$	$۳x-۲y=۵$	(D):
$M(-۲,۴)$	$۴x+۵y-۱=۰$	(D):
$M(-۲,-۳)$	$\frac{x}{۲}+\frac{y}{۳}=۱$	(D):
$M(۰,۴)$	$۵x-۲y=۰$	(D):

۵ـ ضریب زاویه‌ای خط راستی را که از دونقطهٔ $M_۱$ و $M_۲$ می‌گذرد در هریك ازحالات زیر حساب‌کنید و سپس معادلهٔ خط $M_۱M_۲$ را بنویسید:

$M_۱(۱,۳)$ و $M_۲(۳,۱)$

$M_۱(-۱,۲)$ و $M_۲(-۲,-۳)$

$M_۱(-۳,۰)$ و $M_۲(۴,۲)$

$M_۱(-۵,-۲)$ و $M_۲(-۳,۲)$

۶ـ هریك ازخطهای زیر را رسم‌کنید:

$$x+\frac{y}{۲}=۱ \quad و \quad -\frac{۳}{۲}x+\frac{۲y}{۳}=۱$$

$$۵x-\frac{y}{۲}=۱ \quad و \quad -\frac{y}{۳}-\frac{۲}{۵}x=۱$$

۷ـ سه نقطهٔ $A(۵,۰)$ و $B(۱,۲)$ و $C(-۳,-۲)$ سه رأس یك مثلثند . معادلات خطوط راست AB و AC و BC را بنویسید.

۸ـ معادلات میانه‌های مثلث ABC تمرین ۷ را بنویسید.

۹ـ معادلات خطوط راستی که از سه رأس مثلث ABC دو به‌دو می‌گذرند یعنی معادلات خطوط راست AB و BC و CA به‌ترتیب عبارتند از :

$$x+y=1 \quad و \quad x-2y=3 \quad و \quad 3y-5x=15$$

مختصات سه رأس مثلث را حساب کنید.

۱۰ ـ از تقاطع سه خط راست زیر مثلثی حاصل می‌شود:

$$4x-3y+1=0$$
$$2x+y-7=0$$
$$x+3y+4=0$$

معادلات خطوط راستی را که اوساط اضلاع این مثلث را دو به دو به‌هم وصل می‌کنند بنویسید .

۱۱ـ به‌ازای چه مقداری از m سه خط زیر از یك نقطه می‌گذرند:

$$3y=4x+m$$
$$2y=3x+5$$
$$y=5x-8$$

۱۲ـ معادلهٔ خطی را که از مبدأ مختصات به موازات خط $3y-2x-7=0$ رسم شود بنویسید .

۱۳ـ معادلهٔ خط راستی را که از مبدأ مختصات عمود برخط $x+3y=9$ رسم شود بنویسید .

۱۴ـ به‌ازای چه مقداری از a دوخط زیر :

$$(1) \qquad ax+(a-1)y-2(a+2)=0$$
$$(2) \qquad 3ax-(3a+1)y-(5a+4)=0$$

اولا با هم موازی ، ثانیاً برهم عمود و ثالثاً برهم منطبق خواهند بود؟

۱۵ـ تحقیق کنید که سه خط زیر از یك نقطه می‌گذرند و مختصات آن نقطه را تعیین کنید.

$$3x-2y-14=0$$
$$5x-4y-26=0$$
$$x-7y-30=0$$

۱۶ـ ثابت کنید که به‌ازای جمیع مقادیر m هریك ازخطوط زیر ازیك نقطهٔ ثابت می‌گذرند ومختصات آن نقطه را تعیین کنید:

(الف) $$(3x-2y+5)+m(x-2y+4)=0$$

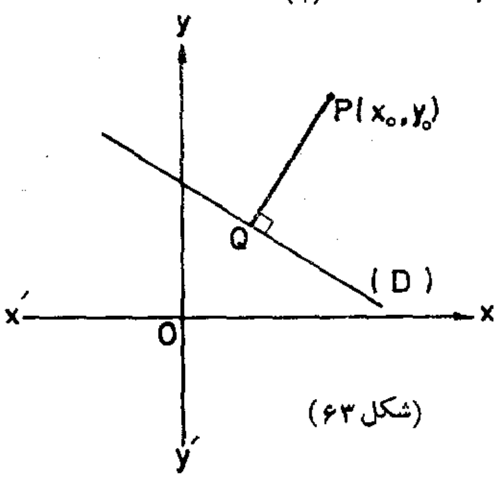
$$(2m-3)x+(7-2m)y+4=0 \qquad \text{(ب)}$$

$$mx+(5m-3)y+9-13m=0 \qquad \text{(ج)}$$

$$(m^2-1)x+(3m^2-2m+1)y-5m^2+4m-3=0 \qquad \text{(د)}$$

۹۱ـ فاصلهٔ یك نقطه از یك خط راست ـ درصفحهٔ مختصات xOy (شکل۶۳) خط (D) به‌معادلهٔ :

$$Ax+By+C=0 \qquad (1)$$



(شکل ۶۳)

و نقطهٔ P به‌مختصات (x_0 , y_0) رادر نظر می‌گیریم و از نقطهٔ P عمود PQ را بر خط (D) فرود می‌آوریم. می‌خواهیم طول PQ یعنی فاصلهٔ نقطهٔP از خط (D) را برحسب مختصات P و ضرایب معادلهٔ (۱) حساب‌کنیم.

راه‌کار این‌است‌که معادلهٔ خط PQ راکه عمود برخط (D) است بنویسیم و مختصات فصل‌مشترك دوخط (D) وPQ یعنی مختصات نقطهٔ Q را حساب کنیم. آن‌گاه با معلوم بودن مختصات دو نقطهٔ P و Q و استفاده از دستور محاسبهٔ فاصلهٔ دونقطه‌که درشمارهٔ ۳۰ فصل اول بیان‌کردیم فاصلهٔ PQ را حساب‌کنیم.

اولا معادلهٔ خط PQ ـ ضریب زاویه‌ای خط(D) عبارت‌است‌از$-\frac{A}{B}$ (چرا؟).پس‌ضریب زاویه‌ای خط PQ که عمود برخط (D) است مساوی است با $\frac{B}{A}$ (چرا؟). و معادلهٔ خط PQ که از نقطهٔ $P(x_0 , y_0)$ می‌گذرد و ضریب زاویه‌ایش $\frac{B}{A}$ است چنین می‌باشد:

$$y-y_0=\frac{B}{A}(x-x_0)$$

و یا

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B} \qquad (2)$$

ثانیاً محاسبهٔ طول PQ ـ نقطهٔ Q یعنی پای عمود وارد از نقطهٔ P برخط (D) فصل مشترك دو خط (D)و PQ است. پس مختصات نقطهٔ Q در دو معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$Ax+By+C=0 \qquad (1)$$

$$\text{(۲)} \qquad \frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}$$

و برای محاسبهٔ مختصات نقطهٔ Q بایددستگاه متشکل از دومعادلهٔ دومجهولی (۱) و(۲) را برحسب x و y حل کنیم.

با استفاده از یك مجهول معاون می‌توان از راه ساده‌تری فاصلهٔ PQ را به‌دست‌آورد:

مقدار مشترك دوطرف معادلهٔ (۲) را t می‌نامیم

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=t$$

دراین صورت داریم :

$$\text{(۳)} \qquad x=x_0+At$$

$$\text{(۴)} \qquad y=y_0+Bt$$

برای آن‌که این مقادیر x و y که از روی معادلهٔ (۲) به‌دست آمده‌اند جواب دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی فوق باشند باید در معادلهٔ (۱) صدق کنند. یعنی باید داشته باشیم:

$$A(x_0+At)+B(y_0+Bt)+C=0$$

و ازآنجا

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+C}{A^2+B^2}$$

اکنون که مقدار مجهول معاون t به‌دست آمد فاصلهٔ PQ را از روی دستور زیر حساب می‌کنیم :

$$\begin{cases} P \text{ مختصات} : (x_0\,,y_0) \\ Q \text{ مختصات} : (x,y) \end{cases} \qquad d=PQ=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$$

برای این کار مقادیر x و y را از تساویهای (۳) و (۴) درتساوی فوق قرار می‌دهیم ، حاصل می‌شود :

$$d=\sqrt{(x_0+At-x_0)^2+(y_0+Bt-y_0)^2}=|t|\times\sqrt{A^2+B^2}$$

و از آنجا

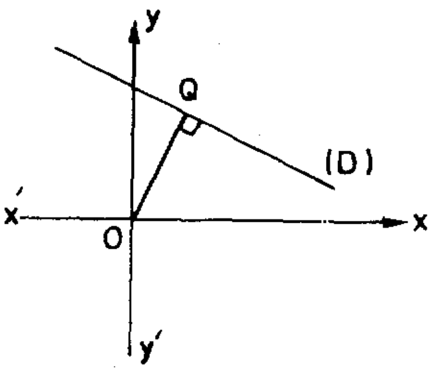
$$\boxed{d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$

یعنی : برای به‌دست آوردن فاصلهٔ نقطهٔ $P(x_0\,,y_0)$ از خط راست $Ax+By+C=0$ باید در معادلهٔ خط به جای x و y مختصات نقطهٔ P را قرار داده و قدر مطلق حاصل را بر $\sqrt{A^2+B^2}$ تقسیم کرد .

(توجه‌کنید که معادلهٔ خط حتماً باید به‌صورت $Ax+By+C=0$ نوشته شده باشد)

حالت خاص ـ فاصلهٔ مبدأ مختصات یعنی نقطهٔ $O(۰,۰)$ از خط به معادلهٔ $Ax+By+C=۰$ مساوی است با :

$d=OQ=\frac{|C|}{\sqrt{A^۲+B^۲}}$ (شکل ۶۴).



(شکل ۶۴)

مثال ۱ ـ محاسبهٔ فاصلهٔ مبدأ مختصات از خط $۳x+۴y=۶$.

ابتدا معادلهٔ خط را به‌صورت

$$۳x+۴y-۶=۰$$

می‌نویسیم. دراین‌صورت

$$d=\frac{|-۶|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=\frac{۶}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۶}{۵}$$

مثال ۲ ـ محاسبهٔ فاصلهٔ نقطهٔ $(۲,۵)$ از خط به‌معادلهٔ $y=۴x-۲$.

ابتدا معادلهٔ خط را به‌صورت $-۴x+y+۲=۰$ می‌نویسیم (یعنی همهٔ جمله‌ها را به یك طرف معادلهٔ خط می‌بریم تا طرف دیگر معادله صفر شود) . سپس از دستور فوق استفاده می‌کنیم :

$$d=\frac{|(-۴)\times۲+۱\times۵+۲|}{\sqrt{(-۴)^۲+۱^۲}}=\frac{|-۱|}{\sqrt{۱۷}}=\frac{\sqrt{۱۷}}{۱۷}$$

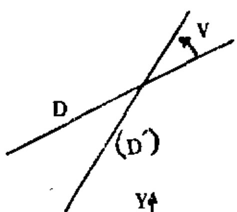
تمرین

در هر یك از تمرینهای زیر فاصلهٔ مبدأ مختصات وهمچنین فاصلهٔ نقطهٔ P را از خط (D) حساب کنید :

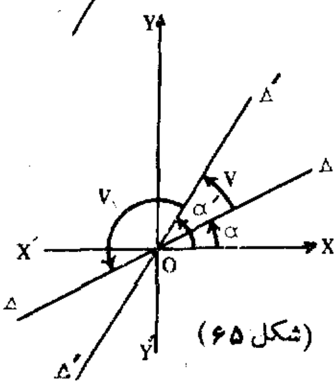
مختصات P	معادلهٔ خط (D)
$(-۳,۱)$	$۳x+۵y-۱۰=۰$
$(۵,۳)$	$۴x+۵y=۰$
$(۲,۱)$	$۴x-۳y=-۱۵$

۲۰- زاویهٔ دوخط - می‌دانیم که از تقاطع دوخط راست، چهار زاویه پدید می‌آید که دوبه‌دو با هم مساوی (زوایای متقابل به‌رأس) یا مکمل‌یکدیگر (زوایای مجاور) هستند؛ درحالت‌کلی از این چهار زاویه دو زاویه حاده و دو زاویه منفرجه مــی‌باشد ؛ و نیز می‌دانیم که ضریب زاویه‌ای هر خط ، مساوی است بـا ضریب زاویه‌ای خطی‌کــه از مبدأ مختصات بـه موازات آن رسم شود و زوایای حادهٔ (یـا منفرجهٔ) دوخط ، برابرند بـا زوایـای حادهٔ (یا منفرجهٔ) دوخط دیگر که‌از یك نقطه به‌موازات آن دو خط رسم شود .

حال فـرض مــی‌کنیم که ضریبهای زاویه‌ای دوخط D و D' معلوم و به‌ترتیب عبارت بـاشند از m و m' ؛ می‌خواهیم تانژانت یکی‌از زوایایی‌راکه دوخط D و D' تشکیل می‌دهند ، حساب‌کنیم .



از مبدأ مختصات دوخط Δ و Δ' را به‌ترتیب به‌موازات D و D' رسم می‌کنیم (شکل ۷۸)



(شکل ۶۵)

اگر α و α' زوایای محدبی‌باشندکه باید Ox را به‌اندازهٔ آنها حول O درجهت مثبت دوران داد تا به ترتیب بر Δ و Δ' منطبق شود ، بنابرآنچه‌گذشت ، داریم :

$$tg\alpha' = m' \quad \text{و} \quad tg\alpha = m$$

حال به‌فرض این‌که $\alpha' > \alpha$ باشد، یکی‌از زوایای‌دوخط Δ و Δ' که آن‌را V می‌نامیم ، عبارت است از زاویهٔ :

$$V = \alpha' - \alpha$$

پس :

$$tgV = tg(\alpha' - \alpha) = \frac{tg\alpha' - tg\alpha}{۱ + tg\alpha' tg\alpha} = \frac{m' - m}{۱ + mm'}$$

اگر زاویهٔ V حاده باشد، tgV مثبت است ؛ اما اگر زاویهٔ V منفرجه باشد ، tgV منفی است و در این حالت زاویهٔ حادهٔ دوخط ، مکمل V مــی‌باشد و تانژانت آن مساوی است بـا $-tgV$ ، پس اگر در حالت‌کلی زاویهٔ حادهٔ دو خط D و D' را $(\widehat{D , D'})$ بنامیم ، در هرحال خواهیم داشت :

$$tg(\widehat{D , D'}) = \left| \frac{m' - m}{۱ + mm'} \right| \qquad (\widehat{D , D'}) < \frac{\pi}{۲}$$

تمرین

۱ـ مطلوب است تعیین زاویهٔ مابین دوخط :

$y-\sqrt{3}x-5=0$ و $\sqrt{3}y-x+6=0$

۲ـ مطلوب است تعیین زاویهٔ مابین دو خط :

$2x-y+1=0$ و $11x-(8+5\sqrt{3})y-5\sqrt{3}=0$

۳ـ مطلوب است تعیین زاویهٔ مابین دوخط :

$y=mx+b$ و $(m-1)x-(m+1)y+(m^2-1)b=0$

لگاریتم اعداد

N	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۱۰	۰۰۰۰	۰۰۴۳	۰۰۸۶	۰۱۲۸	۰۱۷۰	۰۲۱۲	۰۲۵۳	۰۲۹۴	۰۳۳۴	۰۳۷۴
۱۱	۰۴۱۴	۰۴۵۳	۰۴۹۲	۰۵۳۱	۰۵۶۹	۰۶۰۷	۰۶۴۵	۰۶۸۲	۰۷۱۹	۰۷۵۵
۱۲	۰۷۹۲	۰۸۲۸	۰۸۶۴	۰۸۹۹	۰۹۳۴	۰۹۶۹	۱۰۰۴	۱۰۳۸	۱۰۷۲	۱۱۰۶
۱۳	۱۱۳۹	۱۱۷۳	۱۲۰۶	۱۲۳۹	۱۲۷۱	۱۳۰۳	۱۳۳۵	۱۳۶۷	۱۳۹۹	۱۴۳۰
۱۴	۱۴۶۱	۱۴۹۲	۱۵۲۳	۱۵۵۳	۱۵۸۴	۱۶۱۴	۱۶۴۴	۱۶۷۳	۱۷۰۳	۱۷۳۲
۱۵	۱۷۶۱	۱۷۹۰	۱۸۱۸	۱۸۴۷	۱۸۷۵	۱۹۰۳	۱۹۳۱	۱۹۵۹	۱۹۸۷	۲۰۱۴
۱۶	۲۰۴۱	۲۰۶۸	۲۰۹۵	۲۱۲۲	۲۱۴۸	۲۱۷۵	۲۲۰۱	۲۲۲۷	۲۲۵۳	۲۲۷۹
۱۷	۲۳۰۴	۲۳۳۰	۲۳۵۵	۲۳۸۰	۲۴۰۵	۲۴۳۰	۲۴۵۵	۲۴۸۰	۲۵۰۴	۲۵۲۸
۱۸	۲۵۵۳	۲۵۷۷	۲۶۰۱	۲۶۲۴	۲۶۴۸	۲۶۷۲	۲۶۹۵	۲۷۱۸	۲۷۴۲	۲۷۶۵
۱۹	۲۷۸۷	۲۸۱۰	۲۸۳۳	۲۸۵۶	۲۸۷۸	۲۹۰۰	۲۹۲۳	۲۹۴۵	۲۹۶۷	۲۹۸۸
۲۰	۳۰۱۰	۳۰۳۲	۳۰۵۴	۳۰۷۵	۳۰۹۶	۳۱۱۸	۳۱۳۹	۳۱۶۰	۳۱۸۱	۳۲۰۱
۲۱	۳۲۲۲	۳۲۴۳	۳۲۶۳	۳۲۸۴	۳۳۰۴	۳۳۲۴	۳۳۴۴	۳۳۶۵	۳۳۸۵	۳۴۰۴
۲۲	۳۴۲۴	۳۴۴۴	۳۴۶۴	۳۴۸۳	۳۵۰۲	۳۵۲۲	۳۵۴۱	۳۵۶۰	۳۵۷۹	۳۵۹۸
۲۳	۳۶۱۷	۳۶۳۶	۳۶۵۵	۳۶۷۴	۳۶۹۲	۳۷۱۱	۳۷۲۹	۳۷۴۷	۳۷۶۶	۳۷۸۴
۲۴	۳۸۰۲	۳۸۲۰	۳۸۳۸	۳۸۵۶	۳۸۷۴	۳۸۹۲	۳۹۰۹	۳۹۲۷	۳۹۴۴	۳۹۶۲
۲۵	۳۹۷۹	۳۹۹۷	۴۰۱۴	۴۰۳۱	۴۰۴۸	۴۰۶۵	۴۰۸۲	۴۰۹۹	۴۱۱۶	۴۱۳۳
۲۶	۴۱۵۰	۴۱۶۶	۴۱۸۳	۴۲۰۰	۴۲۱۶	۴۲۳۲	۴۲۴۹	۴۲۶۵	۴۲۸۱	۴۲۹۸
۲۷	۴۳۱۴	۴۳۳۰	۴۳۴۶	۴۳۶۲	۴۳۷۷	۴۳۹۳	۴۴۰۹	۴۴۲۵	۴۴۴۰	۴۴۵۶
۲۸	۴۴۷۲	۴۴۸۷	۴۵۰۲	۴۵۱۸	۴۵۳۳	۴۵۴۸	۴۵۶۴	۴۵۷۹	۴۵۹۴	۴۶۰۹
۲۹	۴۶۲۴	۴۶۳۹	۴۶۵۴	۴۶۶۹	۴۶۸۳	۴۶۹۸	۴۷۱۳	۴۷۲۸	۴۷۴۲	۴۷۵۷
۳۰	۴۷۷۱	۴۷۸۶	۴۸۰۰	۴۸۱۴	۴۸۲۹	۴۸۴۳	۴۸۵۷	۴۸۷۱	۴۸۸۵	۴۹۰۰
۳۱	۴۹۱۴	۴۹۲۸	۴۹۴۲	۴۹۵۵	۴۹۶۹	۴۹۸۳	۴۹۹۷	۵۰۱۱	۵۰۲۴	۵۰۳۸
۳۲	۵۰۵۱	۵۰۶۵	۵۰۷۹	۵۰۹۲	۵۱۰۵	۵۱۱۹	۵۱۳۲	۵۱۴۵	۵۱۵۹	۵۱۷۲
۳۳	۵۱۸۵	۵۱۹۸	۵۲۱۱	۵۲۲۴	۵۲۳۷	۵۲۵۰	۵۲۶۳	۵۲۷۶	۵۲۸۹	۵۳۰۲
۳۴	۵۳۱۵	۵۳۲۷	۵۳۴۰	۵۳۵۳	۵۳۶۶	۵۳۷۸	۵۳۹۱	۵۴۰۳	۵۴۱۶	۵۴۲۸
۳۵	۵۴۴۱	۵۴۵۳	۵۴۶۵	۵۴۷۸	۵۴۹۰	۵۵۰۲	۵۵۱۴	۵۵۲۷	۵۵۳۹	۵۵۵۱
۳۶	۵۵۶۳	۵۵۷۵	۵۵۸۷	۵۵۹۹	۵۶۱۱	۵۶۲۳	۵۶۳۵	۵۶۴۷	۵۶۵۸	۵۶۷۰
۳۷	۵۶۸۲	۵۶۹۴	۵۷۰۵	۵۷۱۷	۵۷۲۹	۵۷۴۰	۵۷۵۲	۵۷۶۳	۵۷۷۵	۵۷۸۶
۳۸	۵۷۹۸	۵۸۰۹	۵۸۲۱	۵۸۳۲	۵۸۴۳	۵۸۵۵	۵۸۶۶	۵۸۷۷	۵۸۸۸	۵۸۹۹
۳۹	۵۹۱۱	۵۹۲۲	۵۹۳۳	۵۹۴۴	۵۹۵۵	۵۹۶۶	۵۹۷۷	۵۹۸۸	۵۹۹۹	۶۰۱۰
۴۰	۶۰۲۱	۶۰۳۱	۶۰۴۲	۶۰۵۳	۶۰۶۴	۶۰۷۵	۶۰۸۵	۶۰۹۶	۶۱۰۷	۶۱۱۷
۴۱	۶۱۲۸	۶۱۳۸	۶۱۴۹	۶۱۵۹	۶۱۷۰	۶۱۸۰	۶۱۹۱	۶۲۰۱	۶۲۱۲	۶۲۲۲
۴۲	۶۲۳۲	۶۲۴۳	۶۲۵۳	۶۲۶۳	۶۲۷۴	۶۲۸۴	۶۲۹۴	۶۳۰۴	۶۳۱۴	۶۳۲۵
۴۳	۶۳۳۵	۶۳۴۵	۶۳۵۵	۶۳۶۵	۶۳۷۵	۶۳۸۵	۶۳۹۵	۶۴۰۵	۶۴۱۵	۶۴۲۵
۴۴	۶۴۳۵	۶۴۴۴	۶۴۵۴	۶۴۶۴	۶۴۷۴	۶۴۸۴	۶۴۹۳	۶۵۰۳	۶۵۱۳	۶۵۲۲
۴۵	۶۵۳۲	۶۵۴۲	۶۵۵۱	۶۵۶۱	۶۵۷۱	۶۵۸۰	۶۵۹۰	۶۵۹۹	۶۶۰۹	۶۶۱۸
۴۶	۶۶۲۸	۶۶۳۷	۶۶۴۶	۶۶۵۶	۶۶۶۵	۶۶۷۴	۶۶۸۴	۶۶۹۳	۶۷۰۲	۶۷۱۲
۴۷	۶۷۲۱	۶۷۳۰	۶۷۳۹	۶۷۴۹	۶۷۵۸	۶۷۶۷	۶۷۷۶	۶۷۸۵	۶۷۹۴	۶۸۰۳
۴۸	۶۸۱۲	۶۸۲۱	۶۸۳۰	۶۸۳۹	۶۸۴۹	۶۸۵۷	۶۸۶۶	۶۸۷۵	۶۸۸۴	۶۸۹۳
۴۹	۶۹۰۲	۶۹۱۱	۶۹۲۰	۶۹۲۸	۶۹۳۷	۶۹۴۶	۶۹۵۵	۶۹۶۴	۶۹۷۲	۶۹۸۱
۵۰	۶۹۹۰	۶۹۹۸	۷۰۰۷	۷۰۱۶	۷۰۲۴	۷۰۳۳	۷۰۴۲	۷۰۵۰	۷۰۵۹	۷۰۶۷
۵۱	۷۰۷۶	۷۰۸۴	۷۰۹۳	۷۱۰۱	۷۱۱۰	۷۱۱۸	۷۱۲۶	۷۱۳۵	۷۱۴۳	۷۱۵۲
۵۲	۷۱۶۰	۷۱۶۸	۷۱۷۷	۷۱۸۵	۷۱۹۳	۷۲۰۲	۷۲۱۰	۷۲۱۸	۷۲۲۶	۷۲۳۵
۵۳	۷۱۴۳	۷۲۵۱	۷۲۵۹	۷۲۶۷	۷۲۷۵	۷۲۸۳	۷۲۹۲	۷۳۰۰	۷۳۰۸	۷۳۱۶
۵۴	۷۳۲۴	۷۳۳۲	۷۳۴۰	۷۳۴۸	۷۳۵۶	۷۳۶۴	۷۳۷۲	۷۳۸۰	۷۳۸۸	۷۳۹۶

لگاریتم اعداد

N	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
۵۵	۷۴۰۴	۷۴۱۱	۷۴۱۹	۷۴۲۷	۷۴۳۵	۷۴۴۳	۷۴۵۱	۷۴۵۹	۷۴۶۶	۷۴۷۴
۵۶	۷۴۸۲	۷۴۹۰	۷۴۹۷	۷۵۰۵	۷۵۱۳	۷۵۲۰	۷۵۲۸	۷۵۳۶	۷۵۴۳	۷۵۵۱
۵۷	۷۵۵۹	۷۵۶۶	۷۵۷۴	۷۵۸۱	۷۵۸۹	۷۵۹۷	۷۶۰۴	۷۶۱۲	۷۶۱۹	۷۶۲۷
۵۸	۷۶۳۴	۷۶۴۲	۷۶۴۹	۷۶۵۷	۷۶۶۴	۷۶۷۲	۷۶۷۹	۷۶۸۶	۷۶۹۴	۷۷۰۱
۵۹	۷۷۰۸	۷۷۱۶	۷۷۲۳	۷۷۳۰	۷۷۳۸	۷۷۴۵	۷۷۵۲	۷۷۶۰	۷۷۶۷	۷۷۷۴
۶۰	۷۷۸۱	۷۷۸۹	۷۷۹۶	۷۸۰۳	۷۸۱۰	۷۸۱۸	۷۸۲۵	۷۸۳۲	۷۸۳۹	۷۸۴۶
۶۱	۷۸۵۳	۷۸۶۰	۷۸۶۷	۷۸۷۵	۷۸۸۲	۷۸۸۹	۷۸۹۶	۷۹۰۳	۷۹۱۰	۷۹۱۷
۶۲	۷۹۲۴	۷۹۳۱	۷۹۳۸	۷۹۴۵	۷۹۵۲	۷۹۵۹	۷۹۶۶	۷۹۷۳	۷۹۸۰	۷۹۸۶
۶۳	۷۹۹۳	۸۰۰۰	۸۰۰۷	۸۰۱۴	۸۰۲۱	۸۰۲۸	۸۰۳۵	۸۰۴۱	۸۰۴۸	۸۰۵۵
۶۴	۸۰۶۲	۸۰۶۹	۸۰۷۵	۸۰۸۲	۸۰۸۹	۸۰۹۶	۸۱۰۲	۸۱۰۹	۸۱۱۶	۸۱۲۲
۶۵	۸۱۲۹	۸۱۳۶	۸۱۴۲	۸۱۴۹	۸۱۵۶	۸۱۶۲	۸۱۶۹	۸۱۷۶	۸۱۸۲	۸۱۸۹
۶۶	۸۱۹۵	۸۲۰۲	۸۲۰۹	۸۲۱۵	۸۲۲۲	۸۲۲۸	۸۲۳۵	۸۲۴۱	۸۲۴۸	۸۲۵۴
۶۷	۸۲۶۱	۸۲۶۷	۸۲۷۴	۸۲۸۰	۸۲۸۷	۸۲۹۳	۸۲۹۹	۸۳۰۶	۸۳۱۲	۸۳۱۹
۶۸	۸۳۲۵	۸۳۳۱	۸۳۳۸	۸۳۴۴	۸۳۵۱	۸۳۵۷	۸۳۶۳	۸۳۷۰	۸۳۷۶	۸۳۸۲
۶۹	۸۳۸۸	۸۳۹۵	۸۴۰۱	۸۴۰۷	۸۴۱۴	۸۴۲۰	۸۴۲۶	۸۴۳۲	۸۴۳۹	۸۴۴۵
۷۰	۸۴۵۱	۸۴۵۷	۸۴۶۳	۸۴۷۰	۸۴۷۶	۸۴۸۲	۸۴۸۸	۸۴۹۴	۸۵۰۰	۸۵۰۶
۷۱	۸۵۱۳	۸۵۱۹	۸۵۲۵	۸۵۳۱	۸۵۳۷	۸۵۴۳	۸۵۴۹	۸۵۵۵	۸۵۶۱	۸۵۶۷
۷۲	۸۵۷۳	۸۵۷۹	۸۵۸۵	۸۵۹۱	۸۵۹۷	۸۶۰۳	۸۶۰۹	۸۶۱۵	۸۶۲۱	۸۶۲۷
۷۳	۸۶۳۳	۸۶۳۹	۸۶۴۵	۸۶۵۱	۸۶۵۷	۸۶۶۳	۸۶۶۹	۸۶۷۵	۸۶۸۱	۸۶۸۶
۷۴	۸۶۹۲	۸۶۹۸	۸۷۰۴	۸۷۱۰	۸۷۱۶	۸۷۲۲	۸۷۲۷	۸۷۳۳	۸۷۳۹	۸۷۴۵
۷۵	۸۷۵۱	۸۷۵۶	۸۷۶۲	۸۷۶۸	۸۷۷۴	۸۷۷۹	۸۷۸۵	۸۷۹۱	۸۷۹۷	۸۸۰۲
۷۶	۸۸۰۸	۸۸۱۴	۸۸۱۹	۸۸۲۵	۸۸۳۱	۸۸۳۷	۸۸۴۲	۸۸۴۸	۸۸۵۴	۸۸۵۹
۷۷	۸۸۶۵	۸۸۷۰	۸۸۷۶	۸۸۸۲	۸۸۸۷	۸۸۹۳	۸۸۹۹	۸۹۰۴	۸۹۱۰	۸۹۱۵
۷۸	۸۹۲۱	۸۹۲۶	۸۹۳۲	۸۹۳۸	۸۹۴۳	۸۹۴۹	۸۹۵۴	۸۹۶۰	۸۹۶۵	۸۹۷۱
۷۹	۸۹۷۶	۸۹۸۲	۸۹۸۷	۸۹۹۳	۸۹۹۸	۹۰۰۴	۹۰۰۹	۹۰۱۵	۹۰۲۰	۹۰۲۵
۸۰	۹۰۳۱	۹۰۳۶	۹۰۴۲	۹۰۴۷	۹۰۵۳	۹۰۵۸	۹۰۶۳	۹۰۶۹	۹۰۷۴	۹۰۷۹
۸۱	۹۰۸۵	۹۰۹۰	۹۰۹۶	۹۱۰۱	۹۱۰۶	۹۱۱۲	۹۱۱۷	۹۱۲۲	۹۱۲۷	۹۱۳۳
۸۲	۹۱۳۸	۹۱۴۳	۹۱۴۹	۹۱۵۴	۹۱۵۹	۹۱۶۴	۹۱۷۰	۹۱۷۵	۹۱۸۰	۹۱۸۵
۸۳	۹۱۹۱	۹۱۹۶	۹۲۰۱	۹۲۰۶	۹۲۱۲	۹۲۱۷	۹۲۲۲	۹۲۲۷	۹۲۳۲	۹۲۳۸
۸۴	۹۲۴۳	۹۲۴۸	۹۲۵۳	۹۲۵۸	۹۲۶۳	۹۲۶۹	۹۲۷۴	۹۲۷۹	۹۲۸۴	۹۲۸۹
۸۵	۹۲۹۴	۹۲۹۹	۹۳۰۴	۹۳۰۹	۹۳۱۵	۹۳۲۰	۹۳۲۵	۹۳۳۰	۹۳۳۵	۹۳۴۰
۸۶	۹۳۴۵	۹۳۵۰	۹۳۵۵	۹۳۶۰	۹۳۶۵	۹۳۷۰	۹۳۷۵	۹۳۸۰	۹۳۸۵	۹۳۹۰
۸۷	۹۳۹۵	۹۴۰۰	۹۴۰۵	۹۴۱۰	۹۴۱۵	۹۴۲۰	۹۴۲۵	۹۴۳۰	۹۴۳۵	۹۴۴۰
۸۸	۹۴۴۵	۹۴۵۰	۹۴۵۵	۹۴۶۰	۹۴۶۴	۹۴۶۹	۹۴۷۴	۹۴۷۹	۹۴۸۴	۹۴۸۹
۸۹	۹۴۹۴	۹۴۹۹	۹۵۰۴	۹۵۰۸	۹۵۱۳	۹۵۱۸	۹۵۲۳	۹۵۲۸	۹۵۳۳	۹۵۳۸
۹۰	۹۵۴۲	۹۵۴۷	۹۵۵۲	۹۵۵۷	۹۵۶۲	۹۵۶۶	۹۵۷۱	۹۵۷۶	۹۵۸۱	۹۵۸۶
۹۱	۹۵۹۰	۹۵۹۵	۹۶۰۰	۹۶۰۵	۹۶۰۹	۹۶۱۴	۹۶۱۹	۹۶۲۴	۹۶۲۸	۹۶۳۳
۹۲	۹۶۳۸	۹۶۴۳	۹۶۴۷	۹۶۵۲	۹۶۵۷	۹۶۶۱	۹۶۶۶	۹۶۷۱	۹۶۷۵	۹۶۸۰
۹۳	۹۶۸۵	۹۶۸۹	۹۶۹۴	۹۶۹۹	۹۷۰۳	۹۷۰۸	۹۷۱۳	۹۷۱۷	۹۷۲۲	۹۷۲۷
۹۴	۹۷۳۱	۹۷۳۶	۹۷۴۰	۹۷۴۵	۹۷۵۰	۹۷۵۴	۹۷۵۹	۹۷۶۳	۹۷۶۸	۹۷۷۳
۹۵	۹۷۷۷	۹۷۸۲	۹۷۸۶	۹۷۹۱	۹۷۹۵	۹۸۰۰	۹۸۰۵	۹۸۰۹	۹۸۱۴	۹۸۱۸
۹۶	۹۸۲۳	۹۸۲۷	۹۸۳۲	۹۸۳۶	۹۸۴۱	۹۸۴۵	۹۸۵۰	۹۸۵۴	۹۸۵۹	۹۸۶۳
۹۷	۹۸۶۸	۹۸۷۲	۹۸۷۷	۹۸۸۱	۹۸۸۶	۹۸۹۰	۹۸۹۴	۹۸۹۹	۹۹۰۳	۹۹۰۸
۹۸	۹۹۱۲	۹۹۱۷	۹۹۲۱	۹۹۲۵	۹۹۳۰	۹۹۳۴	۹۹۳۹	۹۹۴۳	۹۹۴۸	۹۹۵۲
۹۹	۹۹۵۶	۹۹۶۱	۹۹۶۵	۹۹۶۹	۹۹۷۴	۹۹۷۸	۹۹۸۳	۹۹۸۷	۹۹۹۱	۹۹۹۶